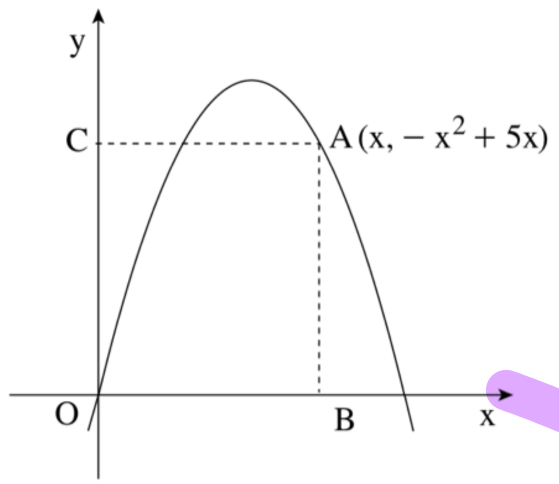
بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٦



٦. النقطة A التي في الربع الأوّل موجودة على الرسم البياني للدالة $y = -x^2 + 5x$.

يُنزِلون من النقطة A عمودين على المحورين، ويتكوّن مستطيل ABOC .

O — نقطة أصل المحاور (انظر الرسم).

ماذا يجب أن يكون الإحداثي x للنقطة A حتّى يكون محيط المستطيل أكبر ما يمكن؟

---

* $AC = x_A = x$
  $AB = y_A = -x^2+5x$

← محيط المستطيل :

محيط $= 2AC + 2AB$
$= 2x + 2(-x^2+5x)$
$= 2x - 2x^2 + 10x$
$= -2x^2 + 12x$

* محيط المستطيل $\underbrace{\text{أكبر ما يمكن}}_{MAX}$:

$(\text{محيط})' = -4x + 12 = 0$
$4x = 12 \quad |:4$
$x = 3$

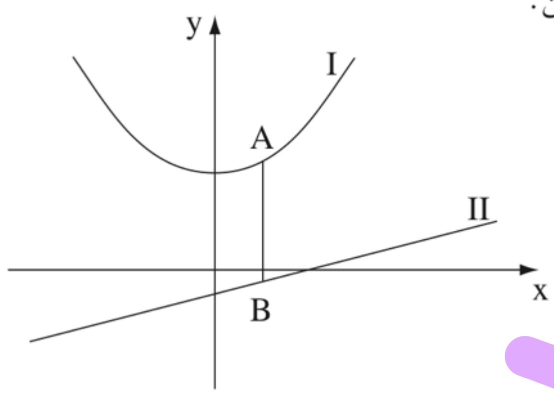
* نفحص اذا جاد $x=3$ ، المحيط MAX :

$(\text{محيط})'' = -4 < 0$
MAX ✓

⇐ $A(x, -x^2+5x) = A(3,6)$

⇐ محيط $= -2x^2 + 12x = -2\cdot3^2 + 12\cdot3 = 18$

٦. معطى في الرسم الرسمان البيانيان I وَ II للدالتين:



$f(x) = \frac{x-2}{4}$ ،

$g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$.

أ. أيّ من الرسمين البيانيين I وَ II هو للدالة $f(x)$، وأيّ رسم بياني هو للدالة $g(x)$ ؟ علّل.

ب. A هي نقطة على الرسم البياني I وَ B هي نقطة على الرسم البياني II بحيث تكون القطعة AB موازية للمحور y (انظر الرسم).

جد الإحداثي x للنقطتين A وَ B، الذي بالنسبة له طول القطعة AB هو أصغر ما يمكن.

أ. I داله تربيعيه : $g(x)=\frac{1}{4}x^2+2$

II داله خطيه : $f(x)=\frac{x-2}{4}$

(طريقه II : نعوّض x=0 بالدالتين , I يقطع ب y موجب
II يقطع ب y سالب)

ب. النقطه A هي على رسم البياني I للداله $g(x)$ $A(x,\frac{1}{4}x^2+2)$

النقطه B هي على رسم البياني II للداله $f(x)$, AB يوازي محور y ← A , B لهم نفس احداثيات ال x

$B(x,\frac{x-2}{4})$

$\Leftarrow \quad AB = y_A - y_B = \frac{1}{4}x^2+2-\left(\frac{x-2}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}x^2+2-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$

$\underline{AB = \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+2\frac{1}{2}}$

← AB اصغر ما يمكن (MIN) عندما : $AB'=0$

$\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+2\frac{1}{2}\right)'=0$

$0.5x-0.25=0$

$0.5x=0.25 \quad /:0.5$

$x=0.5$

نفحص اذا بال $x=0.5$, AB يحصل على MIN :

$AB''=0.5>0$ $\underline{MIN}$ ✓

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٦

٦. مجموع عددين أكبر من صفر هو 24 .

ماذا يجب أن يكون العددان، حتّى يكون حاصل ضرب أحدهما في تربيع الآخر أكبر ما يمكن؟

* $x>0$ العدد الاول
  $y>0$ العدد الثاني

عددين مجموعهما 24 : $\underline{x+y=24}$ ← $y=24-x$

* حاصل ضرب احدى العددان في تربيع الآخر :

$$f(x)=x\cdot y^2=x\cdot(24-x)^2=x(576-48x+x^2)=\underline{x^3-48x^2+576x}$$

* حاصل الضرب اكبر ما يمكن عندما : $\underbrace{\text{اكبر ما يمكن}}_{MAX}$

$$(x^3-48x^2+576x)'=0$$

$$f'(x)=\underline{3x^2-96x+576}=0 \quad \backslash:3$$

$$x^2-32x+192=0$$

دستور ↓

$$x_1=8 \qquad \cancel{x_2=24}$$

$$\downarrow y=24-x$$

$$y_1=16 \qquad \cancel{y_2=0}$$

معطى انّ العددين اكبر من ٥

* نعوّض $x=8$ بالمشتقه الثانيه :

$$f''(x)=(3x^2-96x+576)'=6x-96$$

$$f''(x=8)=6\cdot 8-96<0 \quad \underline{\underline{MAX}}\ \checkmark$$

⇐ العددين 8 و 16

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - شتاء ٢٠١١ - سؤال ٦

أ. من بين جميع الأعداد الموجبة x وَ y التي تحقّق $y(x+2)=9$ ،
جد العددين اللذين بالنسبة لهما المجموع $x+y$ هو أصغر ما يمكن.

ب. جد أصغر قيمة ممكنة للمجموع $x+y$.

أ.

* معطى العددين x و y بينهم العلاقة: $y(x+2)=9 \Leftarrow y=\frac{9}{x+2}$

مجموع العددين، نرمز له بـ S:

$$S=x+y=x+\frac{9}{x+2}$$

* المجموع اصغر ما يمكن عندما S له نقطة MIN, نجد بأي x $S'=0$:

$$S=x+\frac{9}{x+2}$$

$$S'=1+\frac{-9}{(x+2)^2}=0 \Rightarrow 1=\frac{9}{(x+2)^2} \quad / \cdot (x+2)^2 \qquad x\neq -2$$

$$(x+2)^2=9$$

$$x+2=\pm 3$$

$x+2=3$ ، $x=1$

$\cancel{x+2=-3}$ ، $\cancel{x=-5}$

معطى انّ الاعداد موجبه

* نفحص انّ بـ $x=1$ يوجد نقطة MIN :

	$1>x>0$ $(x=\frac{1}{2})$	$x=1$	$x>1$ $(x=2)$
S'	سالب	0	موجب
S	↘	MIN	↗

$\Leftarrow$ المجموع للعددين اصغر ما يمكن عندما $x=1$ و $y=\frac{9}{2+1}=3$

ب.

$$S=x+y=1+3=4$$

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - صيف ٢٠١١ - سؤال ٦

٦. معطى الرسم البياني للدالة $y = -x^2 + 27$ في الربع الأوّل.

المستقيم الذي يوازي المحور x يقطع الرسم

البياني للدالة في النقطة A الموجودة في الربع الأوّل،

والمحور y في النقطة B.

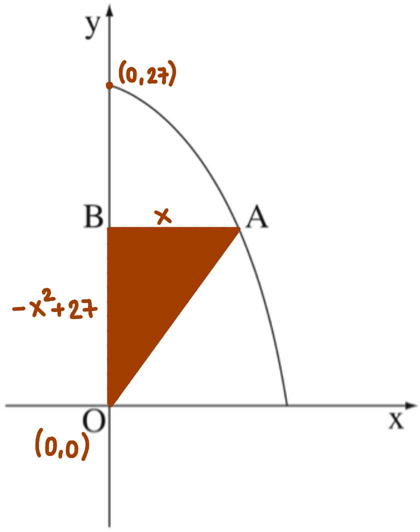
يَصِلون النقطة A بنقطة أصل المحاور O

(انظر الرسم).

أ. ماذا يجب أن يكون طول القطعة AB

حتّى تكون مساحة المثلث AOB أكبر ما يمكن؟

ب. ما هي أكبر مساحة ممكنة للمثلث AOB ؟



أ. A نقطة على الدالة، اذاً احداثياتها: $A(x, -x^2+27)$ $\Leftarrow$ $AB = x$

$BO = -x^2+27$

$S_{\Delta AOB} = \frac{AB \cdot BO}{2} = \frac{x(-x^2+27)}{2}$ $\Leftarrow$

$S_{\Delta AOB} = \frac{-x^3}{2} + \frac{27x}{2}$

مساحة المثلث AOB أكبر ما يمكن عندما: $S' = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{2} = 0 \quad / \cdot -2$

$3x^2 - 27 = 0 \quad / :3$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = 3, -3$ غير ملائم للحل

نفحص عن طريق المشتقة الثانية ان المساحة تحصل على MAX بالنقطة x=3:

$S'' = -3x$

$S''(x=3) = -3 \cdot 3 = -9 < 0$ MAX

$AB = x = 3$

ب. $S_{\Delta ABO}(x=3) = -\frac{3^3}{2} + \frac{27 \cdot 3}{2} = 27$

وحدة مساحة

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - صيف ٢٠١١ موعد ب - سؤال ٦

٦. القطعة BC (المشار إليها بـ x) هي ضلع مشترك بين المربّع ABCD والمستطيل BEFC (انظر الرسم).

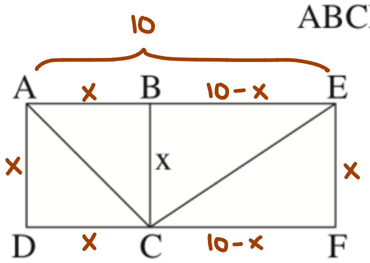
معطى أنّ طول القطعة AE هو 10 سم.

أ. (١) عبّر بدلالة x عن طول القطعة BE.

(٢) عبّر بدلالة x عن CE^2 (تربيع قطر المستطيل).

ب. جد طول القطعة BC الذي بالنسبة له المجموع AC^2+CE^2 هو أصغر ما يمكن.

جـ. جد أصغر قيمة ممكنة للمجموع AC^2+CE^2.

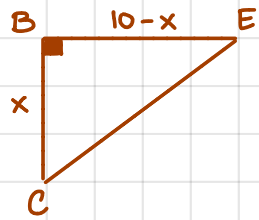


أ. (1) $AE = 10$

$AB = x$ اضلاع المربع متساويه

$\Leftarrow BE = 10 - x$

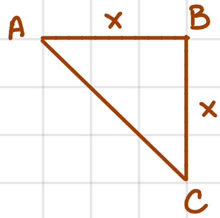
(2)



فيثاغورس:

$$CE^2 = BE^2 + CB^2$$
$$= (10-x)^2 + x^2$$
$$= 100 - 10x + x^2 + x^2$$
$$= 100 - 10x + 2x^2$$

ب.



فيثاغورس:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$
$$= x^2 + x^2$$
$$= 2x^2$$

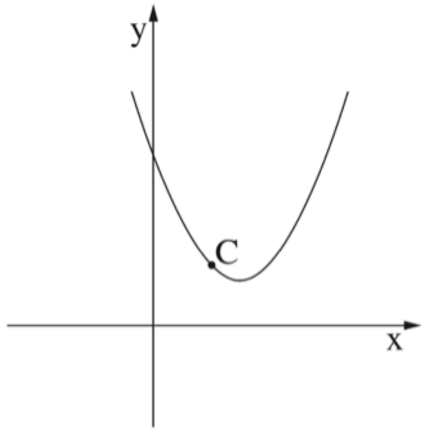
$$AC^2 + CE^2 = 2x^2 + 100 - 10x + 2x^2 \Leftarrow$$
$$= 4x^2 - 10x + 100$$

$$(AC^2+CE^2)' = 8x - 10 = 0$$
$$8x = 10$$
$$x = 1.25$$

المجموع اصغر ما يمكن عندما: $\rightarrow BC = x = 1.25$

ج. $AC^2+CE^2 = 4\cdot(1.25)^2 - 10\cdot 1.25 + 100 = 93.75$

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - شتاء ٢٠١٢ - سؤال ٦



٦. في الرسم الذي أمامك معطاة الدالة $y = x^2 - 3x + 3$.

أ. C هي نقطة على الرسم البياني للدالة .

جد الإحداثي x للنقطة C الذي بالنسبة له مجموع إحداثيَّيْ C هو أصغر ما يمكن.

ب. جد أصغر مجموع ممكن لإحداثيَّيْ النقطة C .

أ. C هي نقطة تقع على الداله : $C(x, x^2-3x+3)$ مجموع احداثياتها هو :

$f(x) = x + x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2x + 3$

المجموع اصغر ما يمكن عندما :
MIN

$f'(x) = 2x - 2 = 0$

$2x = 2$

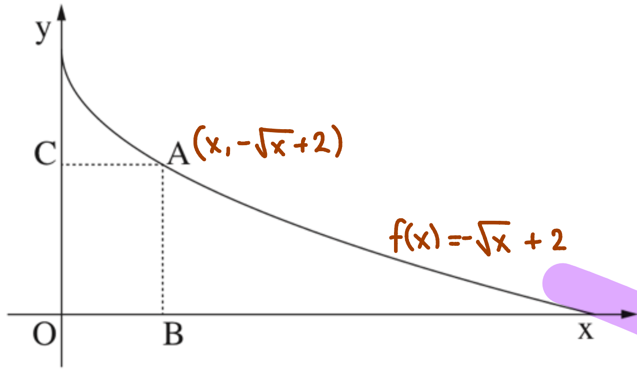
$x_c = 1$

نفحص $f''(x) = 2 > 0$ MIN ✓

ب. $f(x_c) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$ //

6. في الرسم الذي أمامك معطى الرسم البياني للدالة $f(x) = -\sqrt{x} + 2$ في الربع الأوّل.

من النقطة A التي على الرسم البياني للدالة نمرّر عمودين على المحورين بحيث يتكوّن المستطيل ABOC.



أ. عبّر عن محيط المستطيل بدلالة الإحداثي x للنقطة A.

ب. (1) ماذا يجب أن تكون قيمة x حتّى يكون محيط المستطيل ABOC أصغر ما يمكن؟

(2) جد أصغر محيط ممكن للمستطيل.

أ. نفرض $A(x, -\sqrt{x}+2)$ ، اي $AC = OB = x$ ، $AB = CO = -\sqrt{x}+2$ $\Leftarrow$ محيط المستطيل $= x + x - \sqrt{x} + 2 - \sqrt{x} + 2 = 2x - 2\sqrt{x} + 4$

ب. (1) محيط المستطيل اصغر ما يمكن: (المشتقة = 0)

$$(2x - 2\sqrt{x} + 4)' = 0$$

$$2 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad |^2$$

$$4 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

نفحص اذا هو اصغر ما يمكن (MIN)

	$x < \frac{1}{4}$ $(x = \frac{1}{9})$	$x = \frac{1}{4}$	$x > \frac{1}{4}$ $(x = 1)$
(محيط)'	−	0	+
محيط	↘	MIN	↗

$\Rightarrow$ نعم هو MIN

(2) المحيط عندما $x = \frac{1}{4}$ هو:

$$2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} + 4 = 3.5$$

6. حاصل جمع ثلاثة أعداد موجبة هو 18 .

العدد الثاني هو ضعف العدد الأوّل .

أ. ارمزبِـ x إلى العدد الأوّل، وعبّر بدلالته عن العدد الثالث .

ب. جد قيمة x التي بالنسبة لها حاصل ضرب الأعداد الثلاثة هو أكبر ما يمكن .

أ. عدد الأوّل , عدد الثاني , عدد الثالث

x , 2x (هو ضعف العدد الأوّل) , 18-3x (مجموع ثلاثة الاعداد هو 18)

ب. حاصل ضرب الاعداد : $x \cdot 2x \cdot (18-3x) = 2x^2(18-3x) = f(x) = 36x^2-6x^3$

حاصل ضرب الاعداد أكبر ما يمكن عندما : $f'(x) = (36x^2-6x^3)' = 0$

$72x-18x^2 = 0 \quad \backslash :18$

$4x-x^2 = 0$

$x(4-x) = 0$

$x=0 \qquad x=4$

$f''(x) = 72-36x$

$f''(4) = 72-36\cdot 4 < 0$ MAX ✓

السؤال 6

أ. من بين جميع أزواج الأعداد الموجبة x وَ z التي تحقّق $x \cdot z = 48$ ، جد زوج الأعداد الذي يكون المجموع $x + 3z$ بالنسبة له هو أصغر ما يمكن.

ب. ما هو أصغر مجموع ممكن؟

حلّ السؤال 6

أ. نعبّر عن المجموع بواسطة x $(x > 0)$: $x \cdot z = 48 \Leftarrow z = \frac{48}{x} \Leftarrow f(x) = x + \frac{3 \cdot 48}{x}$ دالّة تصف المجموع

لإيجاد أصغر مجموع ممكن نشتقّ

دالّة المجموع ونساويها لِـ0: $f'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$ ، $1 - \frac{144}{x^2} = 0$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm 12$$

معطى أنّ $x > 0$ $\Leftarrow$ نفحص $x = 12$ فقط:

x	4	12	16
f'(x)	−8	0	0.4375
f(x)	↘		↗

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{48}{12} = 4$$

ب. $f(12) = 24$ أقلّ مجموع ممكن.

السؤال 6

من بين جميع الأعداد الموجبة x وَ y التي تحقّق $x^2 \cdot y = 4$ ، جد العددَيْن اللذين بالنسبة لهما المجموع $x + y$ هو أصغر ما يمكن.

إجابة السؤال 6

حسب المعطى: $x^2 \cdot y = 4$

$$\Downarrow$$

$x > 0$ ، لذلك: $y = \frac{4}{x^2}$

$$\Downarrow$$

المجموع هو: $x + y = x + \frac{4}{x^2}$

$$\Downarrow$$

$$M(x) = x + \frac{4}{x^2} = x + 4 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$M'(x) = 1 + 4\left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$M'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$M'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{4}{x^2} = 1$$

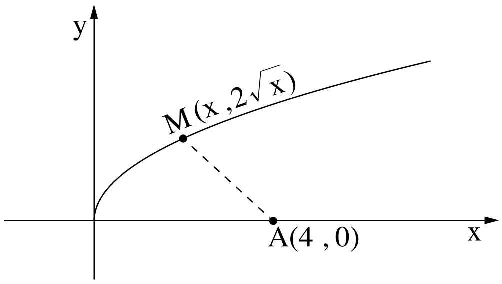
فحص نهاية صغرى:

x	1	2	3
$M'(x)$	-7	0	0.7
$M(x)$	↘		↗

تنتج نهاية صغرى عندما العددان هما: $y = 1 \ , \ x = 2$

السؤال 6

معطاة الدالّة $f(x) = 2\sqrt{x}$ (انظر الرسم).



أ. جد الإحداثيّ x للنقطة M على الرسم البيانيّ للدالّة، التي تربيع بُعدها (d^2) عن النقطة $A(4, 0)$ هو أصغر ما يمكن.

ب. جد أصغر بُعد ممكن (d) بين النقطة M والنقطة A.

إجابة السؤال 6

أ. تربيع بُعد $M(x, 2\sqrt{x})$ عن $A(4, 0)$ هو:

$$d^2 = (x-4)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2$$
$$\Downarrow$$
$$d^2 = x^2 - 4x + 16$$
$$\Downarrow$$

نرمز $g(x) = d^2$ ، وينتج أنّ مشتقّة تربيع البُعد هي:

$$g'(x) = 2x - 4$$

النقطة القصوى تنتج عندما $g'(x) = 0$ ،
لذلك في النقطة القصوى يتحقّق:

$$0 = 2x - 4$$

الإحداثيّ x للنقطة القصوى:

$$x = 2$$

فحص نهاية صغرى:

x	1	2	3
$g'(x)$	-2	0	2
$g(x)$	↘		↗

حسب الجدول توجد لـ $g(x)$ نهاية صغرى في $x = 2$.

ب. بعد تعويض $x = 2$ في d^2 ، ينتج أنّ تربيع أصغر بُعد ممكن هو:

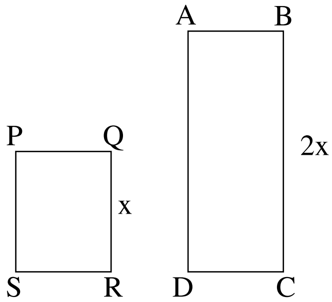
$$d^2 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 16 = 12$$
$$\Downarrow$$

لذلك أصغر بُعد ممكن هو:

$$d = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

السؤال 6

معطى المستطيلان ABCD وَ PQRS (انظر الرسم).



معطى أنّ: $AB + BC =$ 30 سم (مجموع طولَي الضلعين AB وَ BC هو 30 سم).

$AB = PQ$

$QR = x$

$BC = 2x$

أ. (1) عبّر بدلالة x عن طول الضلع AB .

(2) عبّر بدلالة x عن مجموع مساحتَي المستطيلَيْن.

ب. ماذا يجب أن يكون x حتّى يكون مجموع مساحتَي المستطيلَيْن أكبر ما يمكن؟

إجابة السؤال 6

أ. (1) معطى أنّ $BC = 2x$ وَ $AB + BC = 30$ ، لذلك: $AB + 2x = 30$

$\Downarrow$

طول الضلع AB هو: $AB = 30 - 2x$

(2) مجموع مساحتَي المستطيلين: $S_{ABCD} + S_{PQRS}$

مساحة المستطيل ABCD : $S_{ABCD} = AB \cdot BC$

$\Downarrow$

$S_{ABCD} = (30 - 2x) \cdot 2x$

$\Downarrow$

$S_{ABCD} = 60x - 4x^2$

مساحة المستطيل PQRS هي: $S_{PQRS} = PQ \cdot QR$

$\Downarrow$

$S_{PQRS} = (30 - 2x) \cdot x$

$\Downarrow$

$S_{PQRS} = 30x - 2x^2$

$\Downarrow$

لذلك مجموع مساحتَي المستطيلين هو: $S_{ABCD} + S_{PQRS} = 90x - 6x^2$

/يتبع في صفحة 14/

تكملة حلّ السؤال 6.

دالّة مجموع مساحتَي المستطيلين هي : $f(x) = 90x - 6x^2$

المشتقّة هي : $f'(x) = 90 - 12x$

مساواة المشتقّة للصفر : $f'(x) = 0$

$\Downarrow$

$90 - 12x = 0$

$\Downarrow$

النقاط القصوى الداخليّة : $x = 7.5$

فحص نوع النقطة القصوى حسب التعويض في المشتقّة :

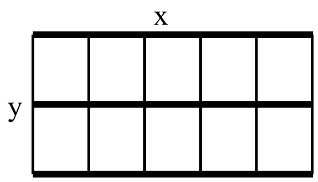
المجالات	$0 < x < 7.5$	$x = 7.5$	$x > 7.5$
x	$x = 7$	$x = 7.5$	$x = 8$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	max	↘

$\Downarrow$

$x = 7.5$ نهاية عظمى

ب. الإحداثيّ x ، الذي بالنسبة له مجموع مساحتَي المستطيلين
هو أكبر ما يمكن، هو : $x = 7.5$ سم

السؤال 6



يعرض الرسم الذي أمامك شبكة شكلها مستطيل.
الشبكة مصنوعة من 3 قضبان طويلة طول كلّ واحد منها هو x ، ومن 6 قضبان قصيرة طول كلّ واحد منها هو y .
معطى أنّ: $x \cdot y = 18$.

أ. (1) عبّر عن y بدلالة x .

(2) عبّر بدلالة x عن مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة.

ب. ماذا يجب أن يكون x ، حتّى يكون مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة أصغر ما يمكن؟

إجابة السؤال 6

أ. (1) معطى أنّ:

$$x \cdot y = 18$$
$$\Downarrow$$

يجب التعبير عن y بدلالة x:

$$y = \frac{18}{x}$$

(2) مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة هو:

$$3x + 6 \cdot \frac{18}{x}$$
$$\Downarrow$$
$$3x + \frac{108}{x}$$

ب. نعرّف f(x) : دالّة مجموع أطوال كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة.

f(x) هي:

$$f(x) = 3x + \frac{108}{x} \quad , \quad x > 0$$

مشتقّة الدالّة f(x) هي:

$$f'(x) = 3 - \frac{108}{x^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 = 36$$
$$\Downarrow$$
$$x = \pm 6$$

نقطة قصوى داخليّة هي:

$$x > 0 \Rightarrow \quad x = 6$$

/يتبع في صفحة 12/

تكملة إجابة السؤال 6.

فحص نوع النقطة القصوى
حسب إشارة المشتقّة الأولى $f'(x)$:

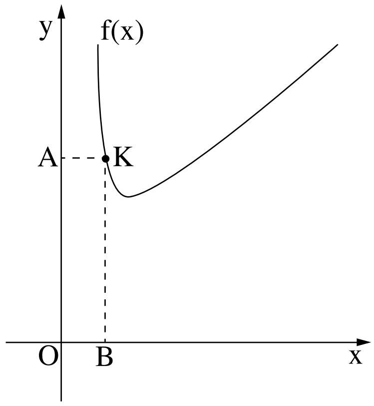
x	3	6	10
$f'(x)$	$-$	0	$+$
	↘	نقطة نهاية صغرى	↗

الإحداثيّ x ، الذي بالنسبة له مجموع أطوال
كلّ القضبان المصنوعة منها الشبكة
هو أصغر ما يمكن:

$\Downarrow$

$x = 6$ نهاية صغرى

السؤال 6



يصف الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ للدالّة

$f(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5$ في المجال $x > 0$.

من النقطة K ، التي تقع على الرسم البيانيّ للدالّة،

مرّروا عمودين على المحورين بحيث

تكوَّنَ المستطيل AKBO (O – نقطة أصل المحاور) .

أ. عبِّر عن طولَي ضلعَي المستطيل AK وَ KB بدلالة الإحداثيّ x للنقطة K .

ب. ماذا يجب أن يكون الإحداثيّ x للنقطة K حتّى يكون محيط المستطيل AKBO أصغر ما يمكن؟

إجابة السؤال 6

أ. إحداثيّات النقطة K هي: $K(x\ ,\ x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5)$

طول القطعة AK يساوي الإحداثيّ x للنقطة K ،

لذلك يتحقّق: $x > 0 \quad , \quad AK = x$

طول القطعة KB يساوي الإحداثيّ y للنقطة K ،

لذلك يتحقّق: $x > 0 \quad , \quad KB = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 6.

ب. محيط المستطيل AKOB :

$محيط_{AKBO} = 2AK + 2KB$

دالّة محيط المستطيل AKBO هي :

$محيط_{AKBO} = P(x) = 4x + \frac{1}{x} + 10 \quad , \quad x > 0$

المشتقّة هي :

$$P'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$P'(x) = 0$$

$$4 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \quad , \quad x > 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

فحص نوع النقطة القصوى
حسب التعويض في دالّة المشتقّة :

$x > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0 < x < \frac{1}{2}$	المجالات
1		$\frac{1}{4}$	x
+	0	−	P'(x)
↗	نقطة نهاية صغرى	↘	P(x)

$$\Downarrow$$

نقطة نهاية صغرى $x = \frac{1}{2}$

الإحداثيّ x، الذي بالنسبة له محيط المستطيل AKBO هو أصغر ما يمكن، هو : $x = \frac{1}{2}$

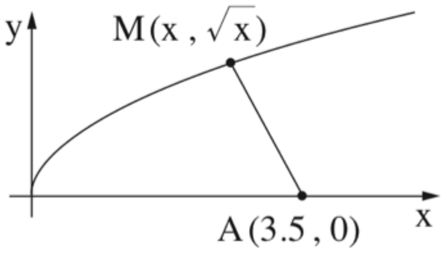
.6 معطاة الدالّة $f(x)=\sqrt{x}$ ،

ومعطاة النقطة $A(3.5\,,0)$.

النقطة M تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

نرمز إلى إحداثيّات النقطة M بـ : $(x\,,\sqrt{x})$

(انظر الرسم).



أ. عبّر بدلالة x عن تربيع طول القطعة MA ، أي $(MA)^2$.

ب. جد ماذا يجب أن يكون x ، حتّى يكون تربيع طول القطعة MA أصغر ما يمكن.

أ. $M(x,\sqrt{x})$, $A(3.5,0)$ $\Rightarrow$ $MA=\sqrt{(x-3.5)^2+(\sqrt{x}-0)^2}$ $\big|^2$ $\longrightarrow$ $MA^2 = x^2-7x+12.25+x$

$MA^2 = x^2-6x+12.25$

ب. نجد بأي x تربيع طول القطعه MA اصغر ما يمكن:

$(MA^2)' = 2x-6=0$

$2x=6 \quad \big|:2$

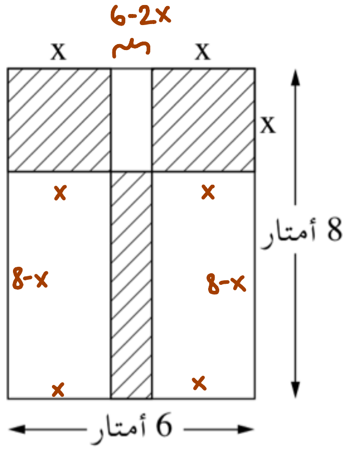
$x=3$

نفحص بأن بال $x=3$, تربيع طول القطعه MA حقاً اصغر ما يمكن MIN

$(MA^2)'' = 2>0$ ✓

$\Leftarrow$ $x=3$

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٦



6. معطاة حديقة زينة شكلها مستطيل.

أبعاد المستطيل هي 8 أمتار وَ 6 أمتار (انظر الرسم).

يرغبون في شتل عشب أخضر في المساحات المخطّطة في الرسم:

شكلا اثنتين من المساحات هما مربّعان متطابقان،

وشكل المساحة الثالثة هو مستطيل، كما هو موصوف في الرسم.

سعر شتل 1 م^2 من العشب الأخضر هو 60 شيكلاً.

نرمز بِـ x إلى طول ضلع المربّعين.

أ. عبّر بدلالة x عن كلّ المساحة المخطّطة في الرسم.

ب. ماذا يجب أن يكون x حتّى تكون مساحة العشب الأخضر أصغر ما يمكن؟

جـ. جد أصغر ثمن ممكن لشتل العشب الأخضر.

أ. نجد المساحة المخططة:

$S(x)= x^2+x^2+(8-x)(6-2x) = 2x^2+48-6x-16x+2x^2 = 4x^2-22x+48$

ب. نجد متى المساحة لها نقاط قصوى:

$S'(x)=8x-22=0$

$8x=22 \quad /:8$

$x=2.75$

نفحص نوعها:

$S''(x)=8>0 \longrightarrow MIN$

اصغر ما يمكن

ج. نعوّض $x=2.75$ بالمساحة:

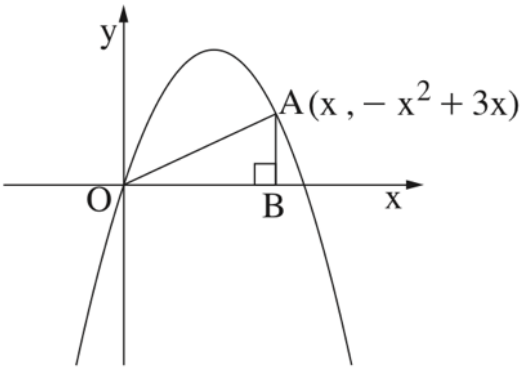
$S(x=2.75)= 4\cdot(2.75)^2-22\cdot2.75+48 = 17.75$ م^2

الثمن الكلي $= 60\cdot17.75 = 1065$ شاقل

ثمن المتر مربّع

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - صيف ٢٠١٥ موعد ب - سؤال ٦

6. النقطة A تقع في الربع الأوّل على القطع المكافئ الذي معادلته $y = -x^2 + 3x$.
مرّوا عبر النقطة A عمودًا على المحور x يقطع المحور في النقطة B.
نرمز بـ x إلى الإحداثيّ x للنقطة A (انظر الرسم).



أ. عبّر بدلالة x عن طول OB وعن طول AB .
O – نقطة أصل المحاور.

ب. (1) جد ماذا يجب أن يكون x ، حتّى تكون مساحة المثلّث ABO أكبر ما يمكن.
(2) جد أكبر مساحة ممكنة للمثلّث ABO .

أ. $A(x, -x^2+3x) \leftarrow AB = y_A = -x^2+3x$

$OB = x_A = x$

ب. (1) مساحة $\triangle ABO$:

$$S(x) = \frac{AB \cdot OB}{2} = \frac{(-x^2+3x)\cdot x}{2} = \frac{-x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2$$

نجد نقاط القصوى لدالة المساحة:

$$S'(x) = -\frac{1}{2}\cdot 3x^2 + \frac{3}{2}\cdot 2x = -\frac{3}{2}x^2 + 3x = 0 \quad / \cdot \frac{2}{3}$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x+2) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

غير منطقي

نفحص نوع النقطة القصوى للمساحة بالنقطة $x=2 \Leftarrow$ $S''(x) = -3x+3$

$S''(x=2) = -3\cdot 2 + 3 = -3 < 0$ MAX

أكبر ما يمكن ✓

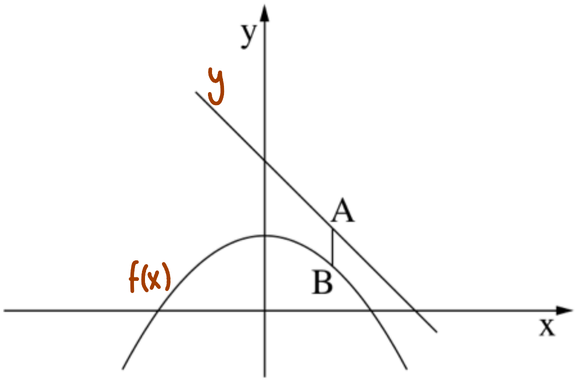
$\Leftarrow$ المساحة أكبر ما يمكن عندما $x=2$

(2) نعوّض $x=2$ بدالة المساحة:

$$S(x=2) = -\frac{2^3}{2} + \frac{3}{2}\cdot 2^2 = 2$$

وحدة مساحة

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - شتاء ٢٠١٦ - سؤال ٦



6. معطاة الدالّة $f(x) = -0.5x^2 + 1$
ومعطى المستقيم $y = -x + 2$.
النقطة A تقع على المستقيم،
والنقطة B تقع على الرسم البيانيّ للدالّة f(x)
بحيث القطعة AB توازي المحور y
(لهم نفس الاحداثي x)
(انظر الرسم).

أ. ماذا يجب أن يكون الإحداثيّ x للنقطة A ،
حتّى يكون طول القطعة AB أصغر ما يمكن؟

ب. جد أصغر طول ممكن للقطعة AB .

أ. نفرض ان الاحداثي x للنقاط A و B هو x : $A(x, -x+2)$ تقع على الدالة y
$B(x, -0.5x^2+1)$ تقع على الدالة f(x)

$\Leftarrow$ $AB = y_A - y_B = -x+2-(-0.5x^2+1)$
$= -x+2+0.5x^2-1$

$AB = 0.5x^2 - x + 1$

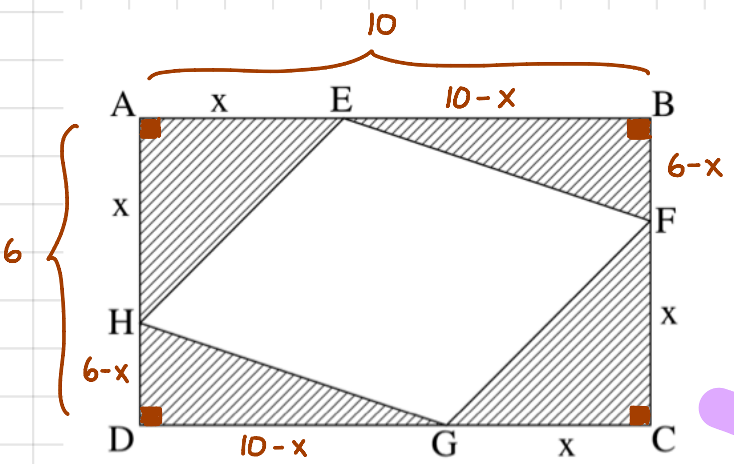
نجد متى AB أصغر ما يمكن (اي متى المشتقة تساوي صفر) :

$AB' = 0.5 \cdot 2x - 1$
$AB' = x - 1 = 0$
$x = 1$

نفحص : MIN $AB'' = 1 > 0$ ✓

ب. اصغر طول ممكن هو عندما $x=1$, نعوّضها ب AB $\leftarrow$

$AB = 0.5x^2 - x + 1$
$AB_{x=1} = 0.5 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 0.5$



6. في المستطيل ABCD معطى أنّ:

AB = DC = 10 سم

AD = BC = 6 سم

على أضلاع المستطيل عَيَّنوا قِطَعًا متساوية:

AE = AH = CF = CG = x

وتكوّنت أربعة مثلّثات مساحتها مخطّطة في الرسم.

أ . عبّر بدلالة x عن كلّ المساحة المخطّطة في الرسم.

ب . ماذا يجب أن يكون x ، حتّى تكون المساحة المخطّطة أصغر ما يمكن؟

جـ . احسب مساحة الشكل الرباعيّ EFGH عندما تكون المساحة المخطّطة أصغر ما يمكن.

أ.

$$S_{\text{المخطط}} = S_{\triangle AEH} + S_{\triangle EBF} + S_{\triangle GCF} + S_{\triangle HDG}$$

$$= \frac{x \cdot x}{2} + \frac{(10-x)(6-x)}{2} + \frac{x \cdot x}{2} + \frac{(10-x)(6-x)}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{60-6x-10x+x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{60-16x+x^2}{2}$$

$$= x^2 + 30 - 8x + \frac{x^2}{2} + 30 - 8x + \frac{x^2}{2}$$

$$= 2x^2 - 16x + 60$$

ب. نجد متى الدالة التي تعبّر عن المساحة المخططة (من بند أ) مشتقتها تساوي صفر: $S(x) = 2x^2 - 16x + 60$

$$S'(x) = 4x - 16 = 0$$

$$4x = 16$$

$x = 4$ سم

نفحص الجواب بالمشتقة الثانية: $S''(x) = 4 > 0$ MIN ✓

ج. نعوّض $x=4$ بدالة المساحة: $S(x=4) = 2\cdot 4^2 - 16\cdot 4 + 60 = 32$ سم²

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - صيف ٢٠١٦ موعد ب - سؤال ٦

اضلاعه وزواياه متساوية

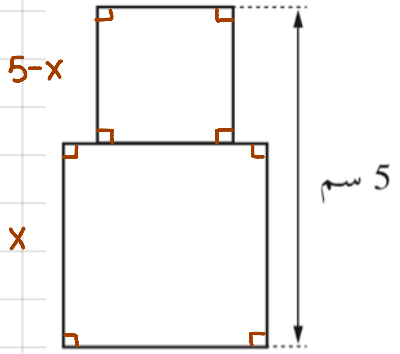
6. معطى شكل مكوّن من مربّعين موضوعين الواحد على الآخر (المربّعان يمكن أن يكونا بمساحتين مختلفتين أو بمساحتين متساويتين).

ارتفاع الشكل هو 5 سم (انظر الرسم).

أ. أشر بـ x إلى طول ضلع المربّع السفليّ، وعبّر بدلالة x عن طول ضلع المربّع العلويّ.

ب. جد ماذا يجب أن يكون x، حتّى تكون مساحة الشكل أصغر ما يمكن.

جـ. احسب أصغر مساحة ممكنة للشكل.



أ. حسب الرسم: $5-x$

ب. مساحة الشكل = مساحة المربعين =

$$S(x) = x\cdot x + (5-x)(5-x)$$
$$= x^2 + 25 - 10x + x^2$$
$$= 2x^2 - 10x + 25$$

نجد متى مساحة الشكل أصغر ما يمكن:

$$S'(x) = 4x - 10 = 0$$
$$4x = 10$$
$$x = 2.5$$

نفحص جوابنا بالمشتقة الثانية: اصغر ما يمكن ✓ $S''(x) = 4 > 0$ MIN

ج. لايجاد اصغر مساحة ممكنة نعوض $x=2.5$ بمعادلة المساحة:

$$S(x=2.5) = 2\cdot 2.5^2 - 10\cdot 2.5 + 25 = 12.5 \text{ سم}^2$$

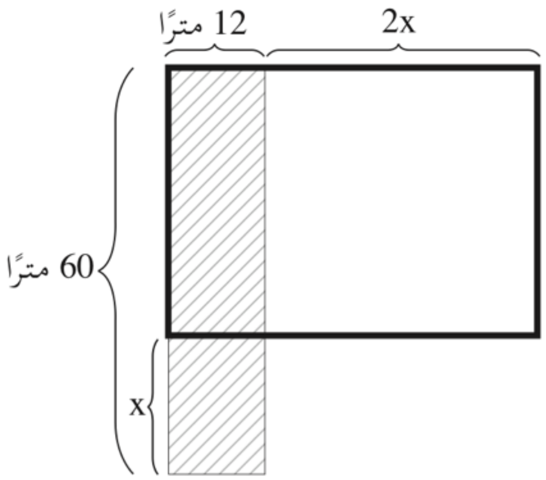
بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - شتاء ٢٠١٧ - سؤال ٦

6. معطى مستطيل عرضه 12 مترًا وطوله 60 مترًا (المستطيل المخطّط في الرسم).
أضافوا 2x أمتار إلى عرض المستطيل،
وأنقصوا x أمتار من طوله، وتكوّن مستطيل جديد.

أ. عبّر بدلالة x عن مساحة المستطيل الجديد (المستطيل الغامق في الرسم).

ب. بالنسبة لأيّة قيمة لـ x يتكوّن مستطيل جديد مساحته أكبر ما يمكن؟

MAX



أ. اطوال اضلاع المستطيل الغامق: $12+2x$ و $60-x$ ⇐ مساحة المستطيل الغامق $= (12+2x)(60-x)$

$720-12x+120x-2x^2$

(صورة مبسّطة) $-2x^2+108x+720$

ب. الدالة هي مساحة المستطيل الغامق (من أ): $f(x)=-2x^2+108x+720$

مطلوب نقطة الـ MAX للدالة، نجد نقطة القصوى: $f'(x)=-4x+108=0$

$-4x=-108 \quad \backslash :-4$

$x=27$

نفحص اذا $x=27$ هو MAX. نجد المشتقة الثانية: $f''(x)=-4<0$ MAX ✓

6. أمامك المستطيل ABCD .

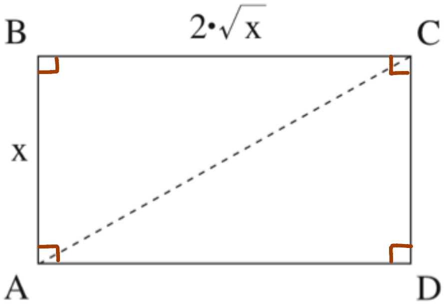
طول الضلع AB هو x ، وطول الضلع BC هو $2\cdot\sqrt{x}$.

أ. جد x الذي بالنسبه له الفرق بين BC وَ AB

MAX

(BC − AB) هو أكبر ما يمكن.

ب. بالنسبة لقيمة x التي وجدتَها في البند "أ"، احسب طول القطر AC .



أ. الدالة هي الفرق بين BC و AB : $f(x)=2\sqrt{x}-x$

نجد نقطة القصوى ال MAX للدالة:

$$\boxed{f'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-1}=0 \quad /\cdot 2\sqrt{x}$$

$$2-2\sqrt{x}=0$$

$$2=2\sqrt{x} \quad /:2$$

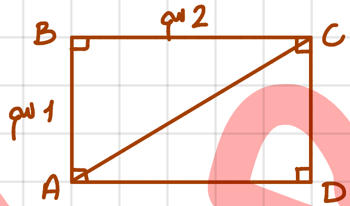
$$1=\sqrt{x} \quad /^2$$

$$x=1$$

نفحص الجواب عن طريق جدول بحث ←

$x=\frac{1}{2}$		$x=2$
$1>x>0$	$x=1$	$x>1$
0.41	0	−0.29
↗	MAX	↘

ب. من البند أ نتج ان x=1 , اي اطوال المستطيل:



فيثاغورس ΔABC:

$$AC^2=AB^2+BC^2$$

$$AC^2=1^2+2^2$$

$$AC^2=5$$

$$AC=\sqrt{5}=2.236$$

بجروت ٣ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٣ - صيف ٢٠١٧ موعد ب - سؤال ٦

6. ABCD هو مستطيل مجموع ضلعَيْه المتجاورين 6 سم.

بنوا على ضلعَي المستطيل، AB وَ AD المربّعين ADEF وَ AGHB ،

كما هو موصوف في الرسم.

نرمز: BC = x .

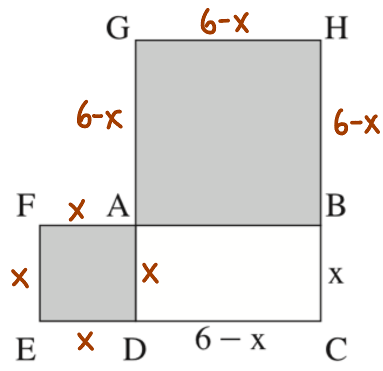
أ. جد طول الضلع BC الذي بالنسبة

له يكون مجموع مساحتَي المربّعين أصغر

MIN ما يمكن (المساحتان الرماديّتان في الرسم).

ب. بالنسبة لطول الضلع BC الذي وجدتَه

في البند "أ" ، احسب طول القطر BD .



أ. الدالة هي مجموع مساحتي المربعين ABHG و AFED :

$f(x) = x\cdot x + (6-x)(6-x)$

$f(x) = x^2 + 36 - 12x + x^2$

$f(x) = 2x^2 - 12x + 36$ //

نشتق الدالة ونجد نقطة ال MIN :

$f'(x) = 4x - 12 = 0$

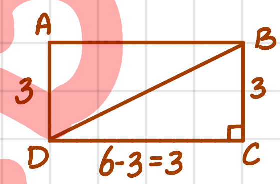
$4x = 12 \quad /:4$

$x = 3$

← نفحص الجواب حسب المشتقة الثانية: $f''(x) = 4 > 0$

MIN ✓

ب. ننظر إلى المستطيل ABCD :



← مثلث قائم $\triangle DBC$ ، فيثاغورس :

$BD^2 = BC^2 + DC^2$

$BD^2 = 3^2 + 3^2$

$BD^2 = 18$

$BD = \sqrt{18} = 4.24$ سم