رياضيات - حسابة التفاضل

حساب التفاضل بدوال نسبيّة

مجموعة التعريف/التعويض

دوال نسبية تظهر على شكل:

$$\mathbf{y} = \frac{\text{تعبير جبري}}{\text{تعبير جبري}}$$

مجموعة التعريف لأي دالة نسبية هي:

$$\boxed{\text{التعبير الجبري بالمقام} \neq \mathbf{0}}$$

أمثلة:

مجموعة التعريف	الدالة
$\mathbf{x \neq 0}$	$y = \frac{1}{x}$
$x^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \neq 0}$	$y = \frac{4}{x^2}$
$x - 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \neq 9}$	$y = \frac{1}{x - 9}$
$(x^2 - 4)^3 \neq 0 \rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \neq \pm 2}$	$y = \frac{1}{(x^2 - 4)^3}$
$9x^2 - 6x + 1 \neq 0 \rightarrow (3x - 1)^3 \neq 0 \rightarrow (3x - 1) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \neq \frac{1}{3}}$	$y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{9x^2 - 6x + 1}$
$x^3 - 36x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 36) \neq 0 \rightarrow x(x - 6)(x + 6) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \neq 0, \pm 6}$	$y = \frac{(5x^2 - 34)^2}{x^3 - 36x}$
$35 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ **x =** كل الاعداد	$y = \frac{(3x - 2)^4}{35}$
$(x - 4)(x - 2)(x - 9)x \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 4, 2, 9, 0}$	$y = \frac{-10}{(x - 4)(x - 2)(x - 9)x}$

حسابة المشتقة لدوال نسبية

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

برهان:

$$\left(f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \xrightarrow{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}} f'(x) = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\right)$$

بصوره عامة:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}}$$

أمثلة:

$$y = -\frac{10}{21x} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{10}{21}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{10}{21x^2}$$

$$y = \frac{2}{x^2} \quad \rightarrow \quad y' = 2\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{4}{x^3}$$

$$y = \frac{2}{3x^6} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{6}{x^7}\right) = -\frac{12}{3x^7} = -\frac{4}{x^7}$$

$$y = \frac{-1}{-7x^4} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{4}{x^5}\right) = -\frac{4}{7x^2}$$

$$y = -\frac{1}{5x^7} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{7}{x^8}\right) = \frac{7}{5x^8}$$

$$y = \frac{4}{25x^9} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{4}{25}\cdot\left(-\frac{9}{x^{10}}\right) = -\frac{45}{25x^{10}} = -\frac{9}{5x^{10}}$$

$$y = \frac{1}{(3x)^3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{27x^3} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{27}\cdot\left(-\frac{3}{x^4}\right) = -\frac{3}{27x^4} = -\frac{1}{9x^4}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

أمثلة:

$$y = \frac{\overbrace{4}^{f}}{\underbrace{5x+3}_{g}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{0}^{f'}\cdot\overbrace{(5x+3)}^{g} - \overbrace{5}^{g'}\cdot\overbrace{4}^{f}}{\underbrace{(5x+3)^2}_{g^2}} = -\frac{20}{(5x+3)^2}$$

$$y = \frac{x-3}{x+1} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{1}^{f'}\cdot\overbrace{(x+1)}^{g} - \overbrace{1}^{g'}\cdot\overbrace{(x-3)}^{f}}{\underbrace{(x+1)^2}_{g^2}}$$

$$y = \frac{x^6-3x+4}{3x^4} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{(6x^5-3)}^{f'}\cdot\overbrace{(3x^4)}^{g} - \overbrace{12x^3}^{g'}\cdot\overbrace{(x^6-3x+4)}^{f}}{\underbrace{(3x^4)^2}_{g^2}} = \frac{18x^9-9x^4-12x^9+36x^4-48x^3}{9x^8}$$

$$y = \frac{9}{(x+3)^4} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{0}^{f'}\cdot\overbrace{(x+3)^4}^{g} - \overbrace{4\cdot(x+3)^3\cdot 1}^{g'}\cdot\overbrace{9}^{f}}{\underbrace{((x+3)^4)^2}_{g^2}}$$

$$y = \frac{x-4-x^2}{9-x^2} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{(1-2x)}^{f'}\cdot\overbrace{(9-x^2)}^{g} - \overbrace{(-2x)}^{g'}\cdot\overbrace{(x-4-x^2)}^{f}}{\underbrace{(9-x^2)^2}_{g^2}}$$

$$y = \frac{(x^2-4)^2}{-x-3} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{2\cdot(x^2-4)^1\cdot 2x}^{f'}\cdot\overbrace{(-x-3)}^{g} - \overbrace{(-1)}^{g'}\cdot\overbrace{(x^2-4)^2}^{f}}{\underbrace{(-x-3)^2}_{g^2}}$$

$$y = \left(\frac{3}{4-2x}\right)^4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{81}{(4-2x)^4} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{0}^{f'}\cdot\overbrace{(4-2x)^4}^{g} - \overbrace{4\cdot(4-2x)^3\cdot(-2)}^{g'}\cdot\overbrace{81}^{f}}{\underbrace{((4-2x)^4)^2}_{g^2}}$$

$$y = \frac{x^3+x^4}{x^2-x^3} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\overbrace{(3x^2+4x^3)}^{f'}\cdot\overbrace{(x^2-x^3)}^{g} - \overbrace{(2x-3x^2)}^{g'}\cdot\overbrace{(x^3+x^4)}^{f}}{\underbrace{(x^2-x^3)^2}_{g^2}}$$

$$\mathbf{y}=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^7-1}}\right)^{\mathbf{3}} \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{(x^7-1)^3} \rightarrow \quad y'=\frac{\overbrace{0}^{f'}\cdot\overbrace{(x^7-1)^3}^{g}-\overbrace{3\cdot(x^7-1)^2\cdot 7x^6}^{g'}\cdot\overbrace{1}^{f}}{\underbrace{((x^7-1)^3)^2}_{g^2}}$$

$$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{(x-4)^3}}{\mathbf{(5-6x)^2}} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{\overbrace{3\cdot(x-4)^2\cdot 1}^{f'}\cdot\overbrace{(5-6x)^2}^{g}-\overbrace{2\cdot(5-6x)^1\cdot(-6)}^{g'}\cdot\overbrace{(x-4)^3}^{f}}{\underbrace{((5-6x)^2)^2}_{g^2}}$$

$$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{4(x^2-6)}}{\mathbf{5(x+3)}} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{4}{5}\cdot\frac{\overbrace{2x}^{f'}\cdot\overbrace{(x+3)}^{g}-\overbrace{1}^{g'}\cdot\overbrace{(x^2-6)}^{f}}{\underbrace{(x+3)^2}_{g^2}}$$

تصرّف الدوال النسبية في جوار النقاط الغير معرّفة - خطوط تقارب عاموديّة

خطوط متقاربة هي خطوط تقترب اليها الرسم البياني للدالة عندما يقترب x لعدد معيّن.

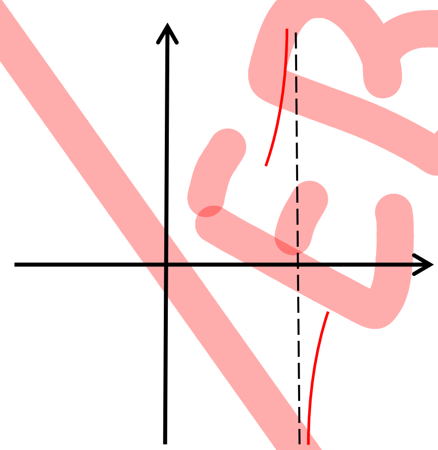
خط تقارب عامودي - אסימפטוטה אנכית

هو خط من الصورة: $\boxed{x = \text{عدد}}$ وينتج عندما نساوي المقام للصفر. (عكس مجموعة التعريف)

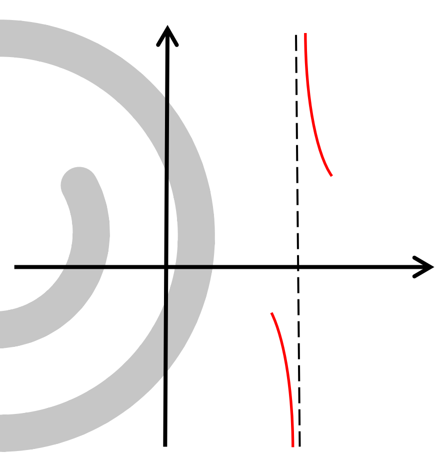
يجب وضع الخطوط التقارب العامودية **بجدول البحث** مع النقاط القصوى لفحص كيفيّة تصرّف الدالة بجوارها.

	...	$x <$ عدد	**خط تقارب عامودي** $x =$ عدد	$x >$ عدد	...
$f'(x)$	...	?		?	...
$f(x)$	...	?		?	...

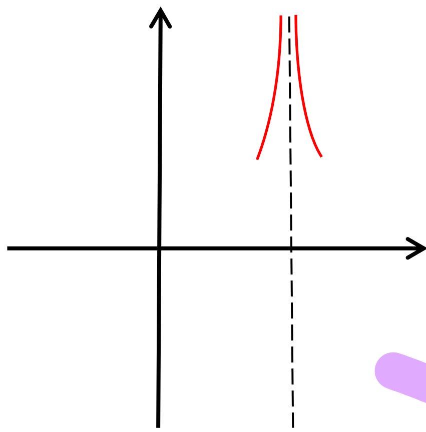
هنالك اربع امكانيات لتصرّف الدالة بجوار الخطوط المتقاربة العامودية:



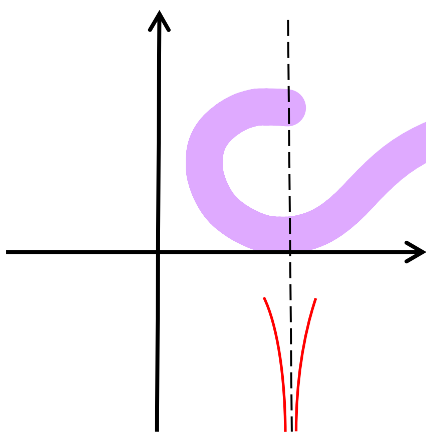
	$x <$ عدد	$x =$ عدد	$x >$ عدد
$f'(x)$	موجب		موجب
$f(x)$	↗		↗



	$x <$ عدد	$x =$ عدد	$x >$ عدد
$f'(x)$	سالب		سالب
$f(x)$	↘		↘



	$x <$ عدد	$x =$ عدد	$x >$ عدد
$f'(x)$	موجب		سالب
$f(x)$	↗		↘



	$x <$ عدد	$x =$ عدد	$x >$ عدد
$f'(x)$	سالب		موجب
$f(x)$	↘		↗

* عند رسم الدالة, نرسم المستقيم $\boxed{x = \text{عدد}}$ بواسطة خط مقطّع وهكذا كي نميّز بينه وبين المحور y, وأيضاً كي نؤكّد أنّه "خارج المجال", أي أنّ الرسم البياني للدالة f(x) لا يقطعه ولا يلمسه.

* الدالة تقترب للـ ∞ والـ $(-\infty)$ بجوار النقطة $\boxed{x = \text{عدد}}$ لذلك هي خط تقارب.

خط تقارب افقيّ - אסימפטוטה אופקית

هو خط من الصورة: $\boxed{y = \text{عدد}}$ تقترب له الرسم البياني للدالة عند اقتراب x لأعداد كبيره جداً (∞) و/أو لأعداد صغيرة جداً $(-\infty)$.

نقرّب الـx لـ ∞ و $(-\infty)$ بمعادلة الدالة :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

* **ملاحظات:**

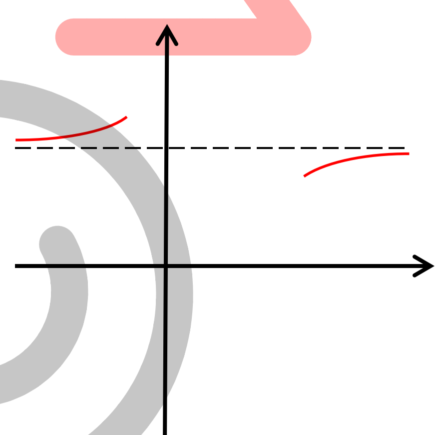
1. $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} \to 0}$ $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \to \text{غير معرّف}}$

2. بالحالة التي بها ينتج $\lim_{x\to\infty} f(x) \to \frac{\infty}{\infty}$ **نقسم البسط والمقام على أكبر قوّه للمتغيّر** وثمّ نقرّب الـx لـ ∞ و $(-\infty)$ اخرى مرّه.

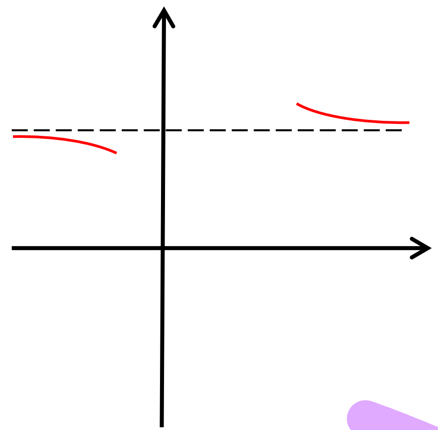
3. الرسم البياني للدالة تمكنها قطع الخط التقارب الأفقي في كل x ما عدا بأطرافها الموجبه والسالبة (الـ ∞ و $(-\infty)$).

4. عند رسم الدالة, نرسم المستقيم $\boxed{y = \text{عدد}}$ بواسطة خط مقطّع وهكذا كي نميّز بينه وبين المحور x, وأيضاً كي نؤكّد أنّ الرسم البياني للدالة f(x) لا يقطعه ولا يلمسه عندما $x \to \pm\infty$.

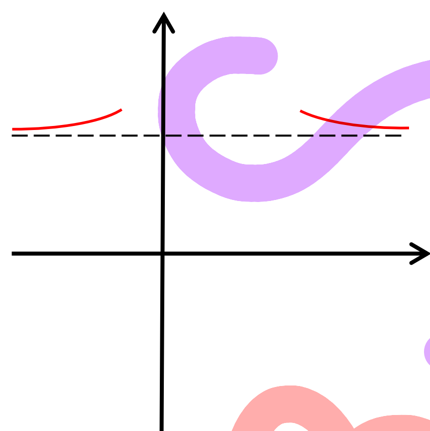
هنالك اربع امكانيات لتصرّف الدالة بجوار الخطوط المتقاربة الافقيّة:



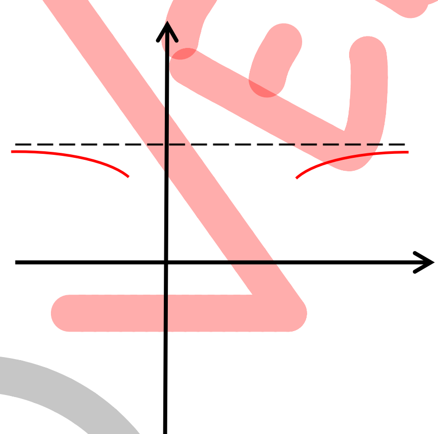
الطرف الأيمن	...	الطرف الأيسر	
موجب	...	موجب	$f'(x)$
↗	...	↗	$f(x)$



	الطرف الأيسر	...	الطرف الأيمن
$f'(x)$	سالب	...	سالب
$f(x)$	$\searrow$	...	$\searrow$



	الطرف الأيسر	...	الطرف الأيمن
$f'(x)$	موجب	...	سالب
$f(x)$	$\nearrow$	...	$\searrow$



	الطرف الأيسر	...	الطرف الأيمن
$f'(x)$	سالب	...	موجب
$f(x)$	$\searrow$	...	$\nearrow$

تمرين

لكل دالة, جد خطوط التقارب التي تعامد المحورين.

$f(x)=\frac{3x^2+6}{x-3}$	$g(x)=\frac{-x^2}{(2-x)^2}$	$h(x)=\frac{-1}{(1-x)(x^2-4)}$
$y(x)=\frac{x^2+8}{x^2-8}$	$p(x)=x^2+\frac{-3}{x^2-10}$	$r(x)=\frac{3}{2-3x-2x^2}$
$k(x)=\frac{x^2+x^3}{x^5-1}$	$w(x)=\frac{2}{-x^2+3x+4}$	$m(x)=\frac{2x+8}{x-3}$
$o(x)=\frac{x-7}{x-3}$	$q(x)=x+\frac{1}{x+2}$	$t(x)=\frac{2x^4-5x^2+1}{x-8x^4}$

تلخيص - لايجاد الخطوط المتقاربة للدوال النسبية

الدالة النسبيّة: $y = \dfrac{\text{تعبير جبري}}{\text{تعبير جبري}}$

خط تقارب افقي אסימפטוטה אופקית	خط تقارב عامودي אסימפטוטה אנכית
1. اكبر قوى لـx بالبسط > اكبر قوى لـx بالمقام $\boxed{y = 0}$ 2. اكبر قوى لـx بالبسط < اكبر قوى لـx بالمقام **لا يوجد** 3. اكبر قوى لـx بالبسط = اكبر قوى لـx بالمقام $\boxed{y = \dfrac{\text{معامل أكبر قوى لـ}x\text{ بالبسط}}{\text{معامل أكبر قوى لـ}x\text{ بالمقام}}}$	التعبير الجبري بالمقام $= 0$