(זכי יקואל כיתה י"א - 804
חלק ד' - פרק 27)

התפלגות הבינומית

n עצרת

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot (n-1)\cdot n$$

n עצרת هو ضرب الاعداد الطبيعية من 1 لـ n.

תמורות

קבוצה שבה n איברים שונים, מספר התמורות האפשריות של k איברים שונים מתוך n איברים שונים הוא:

$$_nP_k = n(n-1)(n-2)\cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

צירופים

נתונה קבוצה ובה n איברים שונים. מספר הצירופים האפשריים של k איברים שונים מתוך n איברים שונים:

$$_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k\leq n)$$

פתרון שאלות בהסתברות עם התפלגות בינומית

ניסיון ברנולי הוא ניסיון מקרי שיש לו שתי תוצאות אפשריות בלבד: "הצלחה" (A) ו-"כישלון" ($\bar{A}$).

ניסיון בינומי הוא ניסוי רב-שלבי, בעל n שלבים, שבו בכל שלב יש רק שתי תוצאות אפשריות בלבד "הצלחה" ו-"כישלון".

* שלבי הניסוי הם בלתי-תלויים זה בזה.
* בכל שלב ההסתברות להצלחה היא p וההסתברות לכישלון היא $q=1-p$.
* מספר איברי מרחב המדגם 2^n.

اذا نفذنا n تجارب مستقلة متتالية ولكل تجربه يوجد نتيجتان فقط هما "النجاح" أو "الفشل".

احتمال النجاح في التجربه الواحدة هو p واحتمال الفشل فيها هو $1-p$.

احتمال الحصول على k نجاحات من n التجارب المذكوره هو:

$$P(\text{k نجاحات من n تجارب}) = P_n(k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot (1-p)^{n-k}$$

דוגמה 1:

ספורטאי זורק חמישה כדורים לסל בזה אחר זה. **בכל זריקה** ההסתברות להצלחה היא 0.6 (נתון כי יש אי-תלות בין חמש הזריקות). חשבו את ההסתברות שהספורטאי יצליח לקלוע לסל בדיוק בארבעה מתוך חמשת הנסיונות.

__פתרון:__

ניעזר בנוסחת ברנולי. נסמן ב-X את מספר ההצלחות של הספורטאי.

הספורטאי זרק לסל **חמש** זריקות, כלומר מספר הנסיונות הוא: $n=5$

וההסתברות להצלחה בכל זריקה היא: $p=0.6$. לכן: $X\sim B(5,0.6)$

ומתקיים באופן כללי השוויון:

$$P(X=k)=\binom{5}{k}\cdot 0.6^k\cdot 0.4^{5-k}$$

מכאן, ההסתברות שהספורטאי יצליח לקלוע לסל בדיוק ארבע פעמים (כלומר: $k=4$) היא:

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0.6^4\cdot 0.4^1=\frac{5!}{4!\,1!}\cdot 0.6^4\cdot 0.4=0.2592$$

דוגמה 2:

זורקים מטבע מאוזנת 6 פעמים. למטבע שני צדדים: H ו-T, שיסומנו "הצלחה" ו"כישלון" בהתאמה.

(א) מהי ההסתברות לקבל H בדיוק 4 פעמים?

(ב) מהי ההסתברות לקבל H לפחות 4 פעמים?

(ג) מהי ההסתברות לקבל H פחות מ-4 פעמים?

(ד) מהי ההסתברות לקבל H לכל היותר 4 פעמים?

(ה) מהי ההסתברות לקבל H יותר מ-4 פעמים?

__פתרון:__

נסמן ב-X את מספר "ההצלחות" בניסוי כולו: $X\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$.

נשים לב כי: $P(X=k)=\binom{6}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-k}=\binom{6}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}\cdot\binom{6}{k}$.

נוכל להיעזר בשוויון זה בחישובים לאורך הפתרון.

(א) $P(X=4)=\frac{1}{64}\cdot\binom{6}{4}=\mathbf{\frac{15}{64}}$

(ב) $P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$

$$=\frac{1}{64}\cdot\left(\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}\right)=\frac{22}{64}=\mathbf{\frac{11}{32}}$$

(ג) $P(X<4)=1-P(X\ge 4)=1-\frac{11}{32}=\mathbf{\frac{21}{32}}$

(ד) $P(X\le 4)=P(X<4)+P(X=4)=\frac{21}{32}+\frac{15}{64}=\mathbf{\frac{57}{64}}$

(ה) $P(X>4)=1-P(X\le 4)=1-\frac{57}{64}=\mathbf{\frac{7}{64}}$

מַשָׁל 3: מטילים קובית משחק הוגנת 5 פעמים.

מהי ההסתברות שהמספר 6 יתקבל **לפחות פעמיים** ?

__פתרון:__

"הצלחה" בניסיון תתקבל כאשר המספר 6 יופיע על הקוביה.

"כישלון" בניסיון יתקבל כאשר יופיע כל מספר שאינו 6 .

נסמן ב- X את מספר ההצלחות ב- 5 הניסיונות ($n = 5$).

ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא: $p = \frac{1}{6}$. מכאן: $X \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right)$.

יש לחשב את ההסתברות $P(X \geq 2)$. נשתמש בהסתברות המאורע המשלים

וניעזר בשוויון: $P(X \geq 2) + P(X < 2) = 1$. נמצא תחילה את $P(X < 2)$.

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3{,}125}{3{,}888} \approx 0.804$$

מכאן:
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \frac{3{,}125}{3{,}888} = \frac{763}{3{,}888} \approx \mathbf{0.196}$$

מַשָׁל 4: בכד ישנם 3 כדורים לבנים ו- 2 כדורים שחורים. מוציאים כדור אחד מהכד, רואים מה צבעו, ומשאירים אותו מחוץ לכד. לאחר מכן מוציאים עם החזרה 4 כדורים מהכד (כלומר, בכל פעם: מוציאים כדור, רואים מה צבעו ומחזירים אותו לכד). מהי ההסתברות שבסך-הכל הוצאו מהכד 3 כדורים לבנים ו- 2 כדורים שחורים ?

__פתרון:__

(א) בכל אחת מהמשפחות, מספר הבנים (וגם מספר הבנות) מתפלג בינומית.

נסמן ב- X_C את מספר הבנים במשפחת כהן (מספר "ההצלחות")

ונסמן ב- X_L את מספר הבנים במשפחת לוי (מספר "ההצלחות").

מתקיים: $X_C \sim B(3, 0.5)$, $X_L \sim B(3, 0.5)$.

ברור, כי מספר הבנים ומספר הבנות במשפחת כהן **הוא בלתי-תלוי** במספר הבנים ובמספר הבנות במשפחת לוי. בדומה להגדרה של **מאורעות בלתי-תלויים**, נאמר שהמשתנים המקריים X_C ו- X_L הם **משתנים מקריים בלתי-תלויים** (לא נביא כאן הגדרה מדויקת של המושג משתנים מקריים בלתי-תלויים). מכאן:

$$P(X_C = 2 \cap X_L = 0) = P(X_C = 2) \cdot P(X_L = 0)$$

$$P(X_C = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$P(X_L = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X_C = 2 \cap X_L = 0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{64}$$

(ב) במקרה זה נתעניין באחת משתי אפשרויות:

"במשפחת כהן יש 2 בנים ובמשפחת לוי אין בנים"

ו"במשפחת כהן אין בנים ובמשפחת לוי יש 2 בנים".

נשים לב כי: $P(X_C = 2 \cap X_L = 0) = P(X_L = 2 \cap X_C = 0)$.

לכן, ההסתברות המבוקשת **כפולה** מההסתברות שמצאנו בסעיף (א) והיא: $P = 2 \cdot \frac{3}{64} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

מִשׁאל 5:

מבין כל המשפחות בארץ בנות 3 ילדים בוחרים באקראי 4 משפחות.

ההסתברות ללידת בן שווה להסתברות ללידת בת ושווה ל- 0.5 .

מהי ההסתברות, שלפחות בשתי משפחות מבין ה- 4 יהיו רק בנים ?

<u>**פתרון:**</u>

נשתמש **פעמיים** בנוסחת ההתפלגות הבינומית.

בפעם הראשונה: נחשב את ההסתברות שבמשפחה בת 3 ילדים כל הילדים הם בנים. ההסתברות שנמצא תהיה ההסתברות ל"הצלחה", כשנשתמש בנוסחת ההתפלגות הבינומית בפעם השנייה.

בפעם השנייה: נחשב את ההסתברות, שלפחות בשתי משפחות מבין 4 המשפחות יהיו רק בנים.

(i) בניסוי הראשון נגדיר כ"הצלחה" את המאורע: "נבחר בן".

לכן, נסמן את מספר הבנים ב- X : $X \sim B(3,0.5)$.

יש לחשב את הסתברות המאורע: "במשפחה רק בנים" $= A$. נחשב:

$$P(A) = P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^0 = 0.125$$

(ii) מתוך כל המשפחות שבהן 3 ילדים בוחרים 4 משפחות. בניסוי השני נגדיר כ"הצלחה" את המאורע: "נבחרה משפחה שיש בה רק בנים".

לפי שלב (i): $p = 0.125$. נסמן ב- Y את מספר "ההצלחות".

מתקיים: $Y \sim B(4,0.125)$ (בוחרים $n=4$ משפחות).

יש לחשב את ההסתברות שלפחות בשתי משפחות יהיו רק בנים. נחשב:

$$P(Y \geq 2) = P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4)$$

$$P(Y \geq 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{7}{8}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{7}{8}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{7}{8}\right)^0$$

$$\boldsymbol{P(Y \geq 2) = \frac{323}{4{,}096} \approx 0.0789}$$

מתאל 6: טייס יוצא למשימת אימון, בה עליו לירות פצצה לעבר מטרה. ההסתברות שהטייס יצליח בניווט ויגיע אל איזור המטרה בהצלחה היא 0.8 . אם הצליח להגיע לאיזור המטרה, ההסתברות שהטייס יזהה את המטרה הנכונה היא 0.9375 . אם הצליח לזהות את המטרה הנכונה, ההסתברות שהטייס יפגע במטרה היא 0.8 .

(א) מהי ההסתברות שהטייס, היוצא למשימת האימון, יפגע במטרה ?

(ב) כמה טייסים יש לשלוח למשימה כדי להבטיח פגיעה במטרה בהסתברות של 0.98976 בדיוק ? (הניחו כי ההסתברויות הנתונות זהות לכל הטייסים).

פתרון:

(א) נסמן ב- A את המאורע: "הטייס הצליח בניווט והגיע לאיזור המטרה".

נסמן ב- B את המאורע: "הטייס זיהה את המטרה הנכונה".

נסמן ב- C את המאורע: "הטייס פגע במטרה".

נשתמש בכלל המכפלה עבור שלושה מאורעות, באופן הבא:

$$P(C \cap B \cap A) = P\left(C \cap (B \cap A)\right) = P\left(C / (B \cap A)\right) \cdot P(B \cap A) =$$
$$= P\left(C / (B \cap A)\right) \cdot P(B / A) \cdot P(A) =$$
$$= 0.8 \cdot 0.9375 \cdot 0.8 = 0.6$$

(ב) נניח ששולחים n טייסים, ומתוכם X מטוסים פוגעים במטרה.

X הוא מספר "ההצלחות" והוא מתפלג בינומית: $X \sim B(n, 0.6)$.

כדי להבטיח פגיעה במטרה, לפחות טייס אחד צריך לפגוע במטרה.

לכן, ההסתברות 0.98976 היא ההסתברות ש- $X > 0$.

כלומר, יש למצוא את n שעבורו: $P(X > 0) = 0.98976$.

ניעזר בשוויון: $P(X > 0) = 1 - P(X = 0)$. נחשב את $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^n = 1 \cdot 1 \cdot 0.4^n = 0.4^n$$

מכאן: $1 - 0.4^n = 0.98976 \quad \Rightarrow \quad 0.4^n = 0.01024$

על-ידי ניסוי וטעייה (הצבת ערכי n טבעיים החל מ- 2)

נקבל כי מתקיים השוויון: $0.4^5 = 0.01024$. לכן: $n = 5$.

כלומר, כדי להבטיח פגיעה במטרה בהסתברות של 0.98976

יש לשלוח **חמישה טייסים** למשימה.

1046 - 1059

(1) ארבעה אנשים ניגשים למבחן נהיגה.
ההסתברות של נבחן לעבור את המבחן היא 0.6 .
(א) מהי ההסתברות שכל הארבעה יעברו את המבחן ?
(ב) מהי ההסתברות שלפחות שלושה יעברו את המבחן ?

(1) (א) 0.1296 (ב) 0.4752

(4) בארץ מסוימת 10% מהתושבים סובלים ממחלה מסוימת. בוחרים באופן מקרי 10 אנשים מאותה ארץ. מהי ההסתברות שבין עשרת האנשים שנבחרו יימצאו לפחות 2 אנשים אשר סובלים מהמחלה ?

(4) ≈ 0.264

(6) בארץ מסוימת, שבה אחוז מסוים מהאנשים מעשנים, דגמו באקראי 5 אנשים.
ההסתברות, שאף אחד מהם לא מעשן, היא $0.8^5 = 0.32768$.
(א) מהי ההסתברות שכל החמישה שנבחרו מעשנים ?
(ב) מהי ההסתברות, שמבין החמישה שנבחרו, יש לפחות אחד מעשן ולפחות אחד שאינו מעשן ?

(6) (א) 0.00032 (ב) 0.672

(7) באוניברסיטה גדולה מסוימת נמצא שההסתברות להצליח במבחן קבלה מסוים היא p $(0 < p < 1)$. כמו כן ידוע, שאם נבחר באופן מקרי חמישה נבחנים הניגשים למבחן הקבלה הזה, אזי ההסתברות **שבדיוק שניים** מהם יצליחו שווה להסתברות **שבדיוק אחד** מהם יצליח.
(א) חשבו את ערכו של p .
(ב) מהי ההסתברות שלכל היותר 2 מתוך ה- 5 יצליחו ?
(ג) מהי ההסתברות שלכל הפחות 2 מתוך ה- 5 יצליחו ?

(7) (א) $p = \frac{1}{3}$ (ב) $\frac{192}{243} = \frac{64}{81}$ (ג) $\frac{131}{243}$

(9) בקו ייצור מסוים ההסתברות שמוצר יהיה תקין גדולה פי 4 מההסתברות שהמוצר יהיה פגום.
(א) מהי ההסתברות שמוצר, שנדגם באקראי, יהיה תקין ?
(ב) מהי ההסתברות שבמדגם אקראי של 5 מוצרים יהיו 4 מוצרים תקינים ומוצר אחד פגום ?

(9) (א) 0.8 (ב) 0.4096

(13) כדי להתקבל לבית-ספר יוקרתי יש להיבחן ב- 6 בחינות כניסה.
מועמד העובר בהצלחה לפחות 5 בחינות מתוך ה- 6 מתקבל לבית-הספר.
ההסתברות להצליח באחד ממבחני הכניסה היא 0.8 .
(א) יצחק ניגש לבחינות הכניסה. מהי ההסתברות שהוא לא יתקבל לבית-הספר ?
(ב) אברהם ויעקב ניגשו לבחינות הכניסה. מהי ההסתברות שאברהם יתקבל לבית-הספר ויעקב לא יתקבל ?

(13) (א) 0.345 (ב) 0.226

(16) נתונים ארבעה כדים. בכל כד ישנם n כדורים, מהם כדור אחד שחור וכל שאר הכדורים לבנים. מוציאים כדור אחד מכל כד. ידוע שההסתברות, שלפחות אחד מבין ארבעת הכדורים שהוצאו יהיה שחור, היא 0.5904 .

(א) חשבו את ערכו של n .

(ב) הראו שההסתברות שכל ארבעת הכדורים יהיו לבנים, שווה להסתברות שבדיוק כדור אחד יהיה שחור.

(16) (א) $n = 5$ (ב) שתי ההסתברויות שוות 0.4096 .

(18) באוכלוסייה מסוימת יש הבדל בין בנים לבנות מבחינת ההצלחה בבחינת הבגרות במתמטיקה. אצל הבנים 80% עוברים ו- 20% נכשלים; אצל הבנות 70% עוברות ו- 30% נכשלות. אם נבחר באופן מקרי ארבעה בנים ושלוש בנות מהאוכלוסייה הנ"ל, חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

(א) מבין הבנים רק שלושה יעברו את המבחן, ומבין הבנות רק שתיים תעבורנה.

(ב) כל הבנים ייכשלו, וכל הבנות תעבורנה.

(ג) לפחות אחד מבין שבעת התלמידים יעבור את המבחן.

(18) (א) ≈ 0.181 (ב) ≈ 0.00055 (ג) ≈ 0.9999568

(21) ההסתברות לעבור טסט (מבחן נהיגה) היא 0.3 .

חמישה נבחנים ניגשים לטסט.

(א) מהי ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעברו את הטסט בהצלחה ?

(ב) מהי ההסתברות שלכל היותר שניים מהם יעברו את הטסט בהצלחה ?

(21) (א) 0.3087 (ב) 0.83692

(22) בכל יום, ההסתברות לכך שדני ייאחר למקום עבודתו היא 0.2 .

בשבוע מסוים, עבד דני שישה ימים.

(א) מהי ההסתברות שמספר האיחורים של דני בשבוע הנ"ל היה 2 ?

(ב) מהי ההסתברות לכך שבשבוע הנ"ל מספר האיחורים של דני היה גדול מ- 2 ?

(22) (א) 0.24576 (ב) 0.09888

(30) ידוע ש- 30% מתושבי עיר מסוימת מרכיבים משקפיים. בוחרים באקראי 12 תושבים ומחלקים אותם לשתי קבוצות של 6 תושבים כל אחת.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

(א) מבין 12 התושבים, בדיוק 6 מרכיבים משקפיים.

(ב) בכל אחת משתי הקבוצות של 6 התושבים, יש בדיוק 3 תושבים שמרכיבים משקפיים.

(30) (א) 0.07925 (ב) 0.03431

(39) בכיתה 20 תלמידים, מתוכם 6 בנות. בוחרים שלושה תלמידים באופן אקראי מבין תלמידי הכיתה. התלמיד שנבחר ראשון יסייע לשרת, התלמיד שנבחר שני יסייע לשומר, והתלמיד שנבחר שלישי יסייע למזכירה.

(א) מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהתלמידים שנבחרו הוא בן ?

(ב) חוזרים על הבחירה במשך 5 ימים.

מהי ההסתברות שרק באחד מהימים נבחר בדיוק בן אחד ?

(39) **(א)** $\frac{7}{38}$ **(ב)** ≈ 0.4079

(48) ידוע כי 30% מכלל הנחקרים במשטרה משקרים, היתר דוברי אמת.

כאשר נחקר משקר, ההסתברות שבדיקה במכונת אמת תקבע שהוא משקר היא 0.95 . כאשר נחקר דובר אמת, ההסתברות שהמכונה תקבע שהוא דובר אמת היא 0.9 .

(א) נחקר נבדק במכונת אמת. מהי ההסתברות שהמכונה תקבע שהוא משקר ?

(ב) המכונה קבעה שנחקר משקר. מהי ההסתברות שהוא אכן משקר ?

(ג) שלושה נחקרים (שאין קשר ביניהם) נבדקים במכונת אמת.

מהי ההסתברות שהמכונה תקבע שבדיוק 2 מהם משקרים ?

(48) **(א)** 0.355 **(ב)** $\frac{57}{71} \approx 0.803$ **(ג)** ≈ 0.2439