السؤال 1

نشرت كلّ من شركتين سياحيّتين، الشركة "أ" والشركة "ب"، في الإنترنت عرضًا لرحلة إلى خارج البلاد. لكلّ عرض نفس السعر.

سعر كلّ واحد من العرضَيْن يشمل سعر تذكرة الطيران وسعر الاستضافة في الفندق.

سعر تذكرة الطيران في الشركة "أ" أقلّ بِـ10% من سعر تذكرة الطيران في الشركة "ب".

سعر الاستضافة في الفندق في الشركة "أ" أعلى بِـ20% من سعر الاستضافة في الفندق في الشركة "ب".

ارمز بِـ x إلى سعر تذكرة الطيران في الشركة "ب"، وَ بِـ y إلى سعر الاستضافة في الفندق في الشركة "ب".

أ. بيّن أنّ $x = 2y$.

ب. اشترى يوسف تذكرة طيران من الشركة "أ" واستضافة في الفندق من الشركة "ب"، ودفع ما مجموعه 5040 شيقل.

جد سعر تذكرة الطيران في الشركة "ب"، وسعر الاستضافة في الفندق في الشركة "ب".

إجابة السؤال 1

أ. سعر تذكرة الطيران في الشركة "أ" هو: $0.9x$

سعر الاستضافة في الفندق في الشركة "أ" هو: $1.2y$

لكلّ عرض نفس السعر، لذلك يتحقّق: $x + y = 0.9x + 1.2y$

$$\Downarrow$$

$$0.1x = 0.2y$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2y$$

ب. دفع يوسف 5040 شيقل مقابل تذكرة الطيران في الشركة "أ" والاستضافة في الفندق في الشركة "ب"، حسب البند "أ"

لذلك يتحقّق:

$$\begin{cases} 0.9x + y = 5040 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

حلّ هيئة المعادلات هو: $x = 3600 \quad , \quad y = 1800$

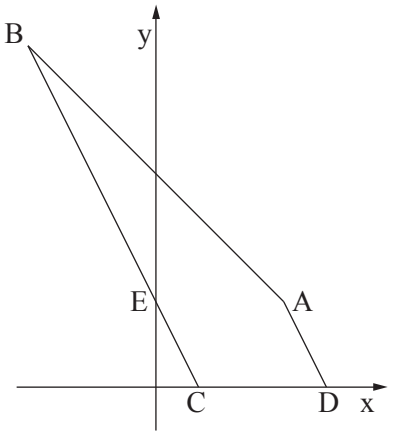
سعر تذكرة الطيران في الشركة "ب" هو: 3600 شيقل

سعر الاستضافة في الفندق في الشركة "ب" هو: 1800 شيقل

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2

ABCD هو شكل رباعيّ فيه $AD \parallel BC$.
الضلع AB موضوع على المستقيم $x + y = 10$ ،
والضلع CD موضوع على المحور x .
معطى أنّ: $C(2 , 0)$ ، $D(8 , 0)$ ،
الإحداثيّ x للنقطة A هو 6 .



أ. جد الإحداثيّ y للنقطة A.
ب. جد معادلة المستقيم AD.
جـ. جد إحداثيّات النقطة B.
د. المستقيم BC يقطع المحور y في النقطة E.
(1) بيّن أنّ المستقيم AE يوازي المحور x .
(2) جد مساحة المثلّث AEB .

إجابة السؤال 2

أ. النقطة A تقع على المستقيم الذي معادلته: $x + y = 10$

الإحداثيّ x للنقطة A هو: $x = 6$

$$\Downarrow$$

$y = 4$

لذلك إحداثيّات النقطة A هي: $A(6 , 4)$

ب. معطاة النقطتان: $A(6 , 4)$, $D(8 , 0)$

ميل المستقيم AD هو: $m_{AD} = \frac{4-0}{6-8} = \frac{4}{-2} = -2$

معادلة المستقيم AD حسب نقطة وميل هي: $y - 0 = -2(x - 8)$

$$\Downarrow$$

$y = -2x + 16$

جـ. $AD \parallel BC$ ، لذلك ميل المستقيم BC هو: -2 (ميلا المستقيمَيْن المتوازيَيْن متساويان)

معادلة المستقيم BC
حسب النقطة $C(2 , 0)$ والميل -2 هي: $y = -2x + 4$

النقطة B هي نقطة تقاطُع
المستقيمين AB وَ BC ، لذلك يتحقّق: $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$x = -6 \quad , \quad y = 16$

لذلك، إحداثيّات النقطة B هي: $B(-6 , 16)$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

د. (1) النقطة E تقع على المستقيم BC
والإحداثيّ x للنقطة هو 0 ، لذلك يتحقّق: $y = -2 \cdot 0 + 4$

$$\Downarrow$$

$$y = 4$$

إحداثيّات النقطة E هي: $E(0\,,4)$

إحداثيّات النقطة A هي: $A(6\,,4)$

ميل المستقيم AE هو: $m_{AE} = \frac{4-4}{0-6} = 0$

$$\Downarrow$$

ميل المستقيم AE هو 0 ، لذلك المستقيم AE يوازي المحور x

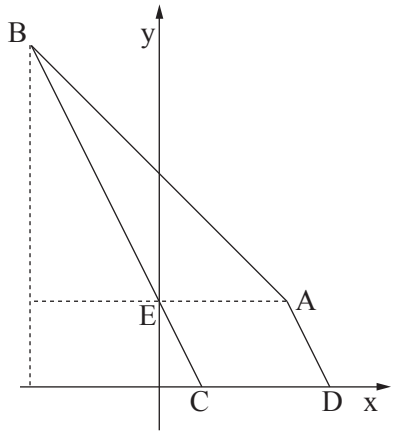
(2) طول القطعة AE هو: $AE = x_A - x_E = 6$

طول الارتفاع على الضلع AE
في المثلّث AEB هو: $y_B - y_E = 16 - 4 = 12$

مساحة المثلّث AEB هي: $S_{\triangle AEB} = \frac{AE \cdot (y_B - y_E)}{2}$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle AEB} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$$



/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

أجروا استطلاعًا للرأي لعدد كبير من الطلّاب. فحص الاستطلاع كم طالبًا يرغب في مواصلة تعليمه الجامعيّ.

حسب نتائج الاستطلاع، 60% من المشتركين في الاستطلاع (أولاد/بنات) يرغبون في مواصلة تعليمهم الجامعيّ.

عدد البنات اللواتي اشترَكْنَ في الاستطلاع هو 3 أضعاف عدد الأولاد الذين اشتركوا في الاستطلاع.

معلوم أنّ 80% من الأولاد الذين اشتركوا في الاستطلاع يرغبون في مواصلة تعليمهم الجامعيّ.

أ. نختار بشكل عشوائيّ طالبًا (ولدًا / بنتًا) اشترك في الاستطلاع.

(1) ما هو الاحتمال بأن تكون قد اختيرت بنت ترغب في مواصلة تعليمها الجامعيّ؟

(2) معلوم أنّه اختيرت بنت.

ما هو الاحتمال بأن تكون راغبة في مواصلة تعليمها الجامعيّ؟

ب. نختار بشكل عشوائيّ 5 طلّاب (أولاد / بنات) من بين المشتركين في الاستطلاع.

ما هو الاحتمال بأن يكون 4 منهم على الأقلّ يرغبون في مواصلة تعليمهم الجامعيّ؟

إجابة السؤال 3

أ. عدد البنات في الاستطلاع هو 3 أضعاف عدد الأولاد،

لذلك يتحقّق: $3 \cdot P(\text{ولد}) = P(\text{بنت})$

كلّ مشترك في الاستطلاع هو ولد أو بنت، لذلك: $P(\text{ولد}) + P(\text{بنت}) = 1$

$$\Downarrow$$

$$4 \cdot P(\text{ولد}) = 1$$

$$P(\text{ولد}) = \frac{1}{4} = 0.25 \quad , \quad P(\text{بنت}) = \frac{3}{4} = 0.75$$

60% من المشتركين في الاستطلاع يرغبون في مواصلة تعليمهم الجامعيّ، لذلك يتحقّق:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{يرغب في مواصلة}\\ \text{تعليمه الجامعيّ}\end{array}\right) = 0.6$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{لا يرغب في مواصلة}\\ \text{تعليمه الجامعيّ}\end{array}\right) = 0.4$$

80% من الأولاد المشتركين في الاستطلاع يرغبون في مواصلة تعليمهم الجامعيّ، لذلك يتحقّق:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{يرغب في مواصلة}\\ \text{تعليمه الجامعيّ}\end{array} \Big/ \text{ولد}\right) = 0.8$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{يرغب في مواصلة}\\ \text{تعليمه الجامعيّ}\end{array} \cap \text{ولد}\right) = 0.8 \cdot 0.25 = 0.2$$

/ يتبع في صفحة 6 /

تكملة إجابة السؤال 3.

تركيز المعطيات في جدول ثنائيّ الأبعاد وحساب الاحتمالات في الجدول التالي:

	يرغب في مواصلة تعليمه الجامعيّ	لا يرغب في مواصلة تعليمه الجامعيّ	
ولد	0.2	0.05	0.25
بنت	0.4	0.35	0.75
	0.6	0.4	1

(1) الاحتمال بأن تكون قد اختيرت بنت ترغب في مواصلة تعليمها الجامعيّ هو:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{ترغب في مواصلة}\\ \text{تعليمه الجامعيّ}\end{array} \cap \text{بنت}\right) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

(2) معلوم أنّه اختيرت بنت.
الاحتمال بأنّها ترغب في مواصلة تعليمها الجامعيّ هو:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{ترغب في مواصلة}\\ \text{تعليمها الجامعيّ}\end{array} \Big/ \text{بنت}\right) = P\frac{\left(\begin{array}{c}\text{بنت} \cap \text{ترغب في مواصلة}\\ \text{تعليمها الجامعيّ}\end{array}\right)}{P(\text{بنت})} = \frac{0.4}{0.75} = 0.53$$

ب. اختير 5 طلّاب من المشتركين في الاستطلاع.
الاحتمال بأن يكون 4 منهم على الأقلّ يرغبون في مواصلة تعليمهم الجامعيّ هو:

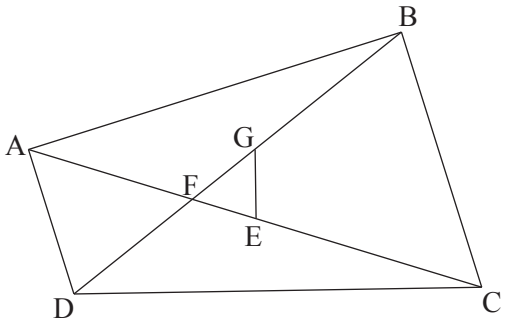
$$P\left(\begin{array}{c}\text{4 على الأقلّ يرغبون في}\\ \text{مواصلة تعليمهم الجامعيّ}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c}\text{4 بالضبط يرغبون في}\\ \text{مواصلة تعليمهم الجامعيّ}\end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c}\text{5 بالضبط يرغبون في}\\ \text{مواصلة تعليمهم الجامعيّ}\end{array}\right) =$$

$$= \binom{5}{4}0.6^4 \cdot 0.4^1 + \binom{5}{5}0.6^5 \cdot 0.4^0 = 0.33696$$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4

F هي نقطة تقاطع القطرين في الشكل الرباعيّ ABCD .
النقطة E تقع على FC ،
والنقطة G تقع على FB ، بحيث يكون الشكل الرباعيّ BCEG قابلاً للحصر في دائرة (انظر الرسم) .



أ. برهن أنّ: $\Delta FEG \sim \Delta FBC$.

ب. معطى أنّ: $\frac{AF}{FG} = \frac{DF}{FE}$.
برهن أنّ: $\Delta FDA \sim \Delta FEG$.

جـ. برهن أنّ: $AD \parallel BC$.

إجابة السؤال 4

أ.

$\sphericalangle GEC + \sphericalangle GBC = 180^o$	مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعيّ القابل للحصر هو 180^o
$\sphericalangle GEC + \sphericalangle GEF = 180^o$	مجموع الزاويتين المتجاورتين هو 180^o
$\Downarrow$	
من هنا: $\sphericalangle GEF = \sphericalangle GBC$	
$\sphericalangle BFC = \sphericalangle GFE$	زاوية مشتركة للمثلّثين
$\Downarrow$	
من هنا: $\triangle FEG \sim \triangle FBC$	(ز.ز.)

ب. معطى أنّ: $\frac{AF}{FG} = \frac{DF}{FE}$

$\sphericalangle AFD = \sphericalangle GFE$	الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان
$\Downarrow$	
$\triangle FDA \sim \triangle FEG$	(ض.ز.ض)

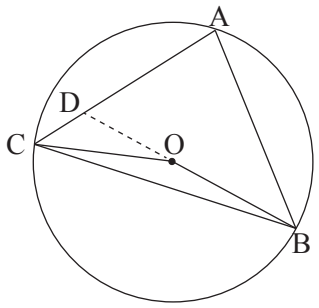
جـ.

$\triangle FDA \sim \triangle FEG$	بُرهن في البند "ب"
$\Downarrow$	
$\sphericalangle GEF = \sphericalangle ADF$	زاويتان متناظرتان في مثلّثين متشابهين
$\sphericalangle GEF = \sphericalangle GBC$	بُرهن في البند "أ"
$\Downarrow$	
$\sphericalangle ADF = \sphericalangle GBC = \sphericalangle DBC$	
$\Downarrow$	
$AD \parallel BC$	إذا كانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، فإنّ المستقيمين متوازيان

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 5

ABC هو مثلّث متساوي الساقين $(AC = AB)$ ،
محصور في دائرة مركزها O ونصف قطرها R (انظر الرسم).



معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = 80^o$.

أ. عبّر بدلالة R عن طول الضلع AB.

ب. جِد $\sphericalangle COB$. علّل.

جـ. امتداد OB يقطع الساق AC في النقطة D
(انظر الرسم).
معطى أنّ: $BD = 5$ سم .

(1) جد $\sphericalangle ABD$.

(2) جد R .

إجابة السؤال 5

أ. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$ زاويتا القاعدة متساويتان في المثلّث المتساوي الساقين ABC .

$\sphericalangle CAB = 80^o$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ACB = \frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o

في المثلّث ABC

حسب نظريّة السينوس يتحقّق: $\frac{AB}{\sin \sphericalangle ACB} = 2R$

$\frac{AB}{\sin 50^o} = 2R$

$\Downarrow$

$AB = 2R \sin 50^o$

ب. $\sphericalangle COB = 2 \sphericalangle CAB = 160^o$ الزاوية المركزيّة في الدائرة هي ضعف الزاوية المحيطيّة التي تستند إلى نفس القوس

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة إجابة السؤال 5.

جـ. (1) $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB$ زاويتا القاعدة متساويتان في المثلّث المتساوي الساقين BCO

$\sphericalangle COB = 160^o$ بُرهن في البند "ب"

$\Downarrow$

$\sphericalangle OBC = \frac{180^o - 160^o}{2} = 10^o$ مجموع الزوايا في المثلّث هو 180^o

$\Downarrow$

$\sphericalangle ABD = 50^o - 10^o = 40^o$

(2) في المثلّث ADB

حسب نظريّة السينوس

يتحقّق: $\frac{AB}{\sin \sphericalangle ADB} = \frac{BD}{\sin \sphericalangle DAB}$

$\sphericalangle ADB = 180^o - 80^o - 40^o = 60^o$ مجموع الزوايا في المثلّث ADB

$\Downarrow$

$\frac{2R \sin 50^o}{\sin 60^o} = \frac{5}{\sin 80^o}$

$\Downarrow$

$R =$ 2.87 سم

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 6

معطاة الدالّة $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$.

أ. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

ب. جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

جـ. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$.

د. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

هـ. هل المستقيم $y=x-2$ يقطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ؟ علّل.

إجابة السؤال 6

أ. التعبير الجبريّ داخل الجذر

يجب أن لا يكون سالبًا، لذلك: $x^2-4x+3\geq 0$

$$\Downarrow$$

مجال تعريف الدالّة $f(x)$ هو: $x\leq 1 \quad , \quad x\geq 3$

ب. الإحداثيّ x لنقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور y هو 0 ، لذلك يتحقّق: $f(0)=\sqrt{0^2-4\cdot 0+3}$

نقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور y هي: $(0\,,\sqrt{3})$

الإحداثيّ y لنقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور x هو 0 ، لذلك يتحقّق: $f(x)=0$

$$\Downarrow$$

$$(f(x))^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$\Downarrow$$

$$x=1 \quad , \quad x=3$$

نقطتا تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور x هما: $(1\,,0) \quad , \quad (3\,,0)$

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة إجابة السؤال 6.

جـ. مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي: $f'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}$

$f'(x)=0$

$\Downarrow$

$x=2$ ، ليس في المجال

$\Downarrow$

المشتقّة لا تساوي صفرًا في المجال.

نفحص إشارة المشتقّة $f'(x)$ في المجالين

$x<1$ وَ $x>3$

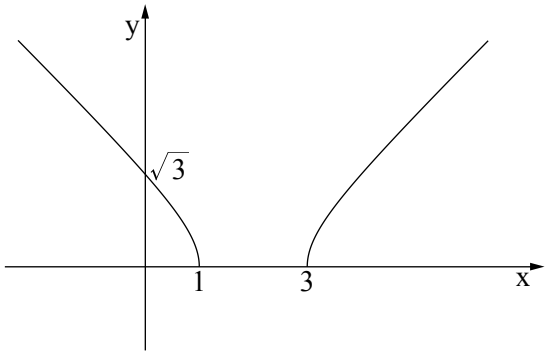
إشارتا دالّة المشتقّة مركّزتان في الجدول التالي:

x	$x<1$		$x>3$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

الدالّة $f(x)$ تنازليّة في المجال $x<1$ ، لأنّ $f'(x)<0$ بالنسبة لِـ $x<1$

الدالّة $f(x)$ تصاعديّة في المجال $x>3$ ، لأنّ $f'(x)>0$ بالنسبة لِـ $x>3$

د. رسم بيانيّ تقريبيّ للدالّة:



هـ. نفحص إذا كان للرسمين البيانيّين
للدالّتين نقاط تقاطُع: $x-2=\sqrt{x^2-4x+3}$

$\Downarrow$ تربيع

$(x-2)^2=x^2-4x+3$

$x^2-4x+4=x^2-4x+3$

$\Downarrow$

$4=3$

قضيّة كذب، لذلك لا يوجد حلّ

$\Downarrow$

من هنا: المستقيم $y=x-2$ لا يقطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

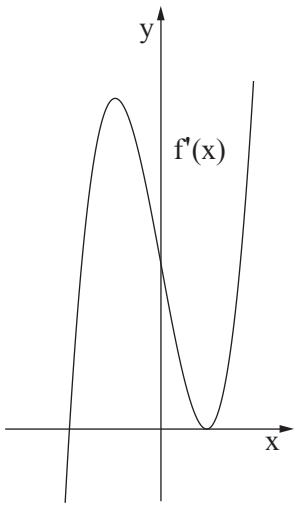
/ يتبع في صفحة 12 /

السؤال 7

$f(x)$ هي دالّة معرَّفة لكلّ x .

الرسم الذي أمامك يعرض الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$.

الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ يمرّ
عبر النقطتين: $(0\ ,\ -2)$ ، $(0\ ,\ 1)$.



أ. (1) حسب الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$،
جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$.

(2) ما هو الإحداثيّ x للنقطة القصوى
للدالّة $f(x)$ ، وما هو نوع النقطة القصوى؟ علّل.

(3) معطى أنّ دالّة المشتقّة هي
$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
الإحداثيّ y للنقطة القصوى للدالّة $f(x)$ هو -10 .
جد الدالّة $f(x)$.

ب. جد إحداثيّات النقاط التي فيها ميل المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ هو 0.

إجابة السؤال 7

أ. (1) حسب الرسم البيانيّ المعطى، دالّة المشتقّة $f'(x)$
تساوي صفرًا في النقطتين اللتين إحداثيّهما الـ x
هو $x = 1$ وَ $x = -2$.
تركيز إشارات $f'(x)$ في جدول:

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	نقطة نهاية صغرى	↗		↗

$f'(x) \geq 0$ في المجال $x > -2$ ، $f'(x) < 0$ في المجال $x < -2$
لذلك
الدالّة $f(x)$ تنازليّة في المجال $x < -2$ ، الدالّة $f(x)$ تصاعديّة في المجال $x > -2$

(2) الإحداثيّ x للنقطة القصوى للدالّة $f(x)$ هو: $x = -2$ هذه هي نقطة نهاية صغرى،
لأنّ الدالّة تنازليّة في المجال $x < -2$
وتصاعديّة في المجال $x > -2$

/ يتبع في صفحة 13 /

تكملة إجابة السؤال 7.

(3) إحداثيّات النقطة القصوى هي: $(-2,-10)$

الدالّة $f(x)$ هي دالّة أصليّة لِـ $f'(x)$
لذلك يتحقّق: $f(x)=\int(4x^3-12x+8)\,dx$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=x^4-6x^2+8x+C$$

الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يمرّ عبر
نقطة النهاية الصغرى $(-2,-10)$
لذلك يتحقّق: $-10=(-2)^4-6(-2)^2+8(-2)+C$

$$\Downarrow$$

$$C=14$$

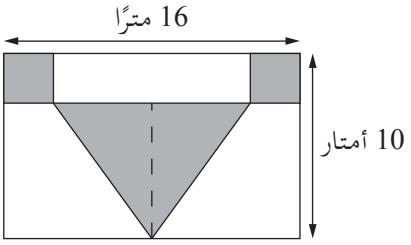
الدالّة $f(x)$ هي: $f(x)=x^4-6x^2+8x+14$

ب. ميل المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ هو 0 بالنسبة للنقاط التي تساوي فيها دالّة المشتقّة $f'(x)$ صفرًا.
النقطتان هما: $(-2,-10)$, $(1,17)$

/ يتبع في صفحة 14 /

السؤال 8

طول حائط شكله مستطيل هو 16 مترًا،
وارتفاع الحائط 10 أمتار.
يريدون تغطية قسم من الحائط بالكرميكا.
القسم الذي يريدون تغطيته يشمل:



- مربّعين متطابقين في زاويتَي المستطيل
- مثلّثًا متساوي الساقين قاعدته موازية لضلع المستطيل

(المساحات الرماديّة في الرسم).

ارمز بِـ x إلى طول ضلع المربّع، وأجب عن البنود "أ" – "جـ".

أ. عبّر بدلالة x عن الارتفاع على قاعدة المثلّث المتساوي الساقين.

ب. ماذا يجب أن يكون x ، حتّى يكون مجموع المساحات التي يريدون تغطيتها بالكرميكا أصغر ما يمكن؟

جـ. بالنسبة لِـ x الذي وجدتَه في البند "ب"، احسب النسبة المئويّة من مساحة الحائط، التي تشكّل القسم الذي يريدون تغطيته بالكرميكا.

إجابة السؤال 8

أ. الارتفاع على القاعدة في المثلّث المتساوي الساقين هو: $10-x$, $0<x<10$

ب. مساحة كلّ واحد من المربّعين هي: $S_{\square}=x^2$

طول القاعدة في المثلّث المتساوي الساقين هو: $(16-2x)$, $0<x<8$

مساحة المثلّث المتساوي الساقين هي: $S_{\triangle}=\frac{(16-2x)\cdot(10-x)}{2}$

مجموع المساحات التي يريدون تغطيتها بالكرميكا هو
مربّعان متطابقان ومثلّث،
لذلك مجموع المساحات هو: $S(x)=2x^2+\frac{(16-2x)(10-x)}{2}$

$$S(x)=3x^2-18x+80 \quad , \quad 0<x<8$$

مشتقّة $S(x)$ هي: $S'(x)=6x-18$

إشارة المشتقّة:

x	2	3	4
S'(x)	−	0	+
S(x)	↘	نقطة نهاية صغرى	↗

⇓

مجموع المساحات هو أصغر ما يمكن بالنسبة لِـ: أمتار $x=3$

/ يتبع في صفحة 15 /

تكملة إجابة السؤال 8.

جـ. مساحة كلّ الحائط هي: $16 \cdot 10 = 160$ م^2

بالنسبة لِـ $x = 3$ مجموع المساحات
التي يريدون تغطيتها بالكرميكا هو: $S(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 80 = 53$

$$\frac{53}{160} \cdot 100 = 33.125\%$$

المساحة التي يريدون تغطيتها بالكرميكا
هي 33.125% من مساحة الحائط

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.