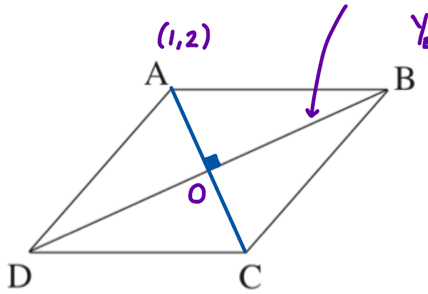
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ١

$x-2y-2=0$

$x-2=2y \quad \backslash :2$

$y_{BD}=\frac{1}{2}x-1$



١. معطى معين ABCD (انظر الرسم).

إحداثيات الرأس A هي $(1, 2)$.

معادلة القطر BD هي $x-2y-2=0$.

أ. (١) جد معادلة القطر AC.

(٢) جد إحداثيات الرأس C.

ب. طول القطر BD هو $4\sqrt{5}$.

جد طول ضلع المعين.

جـ. جد معادلة المستقيم AB، إذا كان معطى أنّ الرأس B موجود في الربع الأوّل.

أ. (1) أقطار المعين تتعامد بعضها البعض ⇐ حاصل ضرب ميولهم: -1

$\frac{1}{2}$

$m_{AC}\cdot m_{BD}=-1 \Rightarrow m_{AC}=-2$

$y_{AC}=-2x+n$

نعوّض $A(1,2)$: $2=-2\cdot 1+n$

$n=4 \Rightarrow y_{AC}=-2x+4$

(2) نجد النقطة O (نقطة تقاطع القطرين):

$y_{AC}=y_{BD}$

$-2x+4=\frac{1}{2}x-1$

$5=2.5x \quad \backslash :2.5$

$x=2 \rightarrow y=-2\cdot 2+4=0 \Rightarrow O(2,0)$

أقطار المعين تنصّف بعضها البعض:

$AO=OC,\ DO=OB$

O نقطة وسط AC. نفرض $C(x,y)$:

$O(2,0)=\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$

$\frac{1+x}{2}=2 \qquad \frac{2+y}{2}=0$

$1+x=4 \qquad 2+y=0$

$x=3 \qquad y=-2 \Rightarrow C(3,-2)$

ب. $BO=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$AO=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$

مثلث قائم ΔAOB، فيثاغورس:

$AB^2=AO^2+OB^2$

$AB^2=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=25$

$AB=5$ طول ضلع المعين

ج. B يقع على y_{BD} ⇐ $B(x,\frac{1}{2}x-1)$

$O(2,0)$

$BO=2\sqrt{5}$

$BO=2\sqrt{5}=\sqrt{(x-2)^2+(\frac{1}{2}x-1-0)^2} \quad |^2$

$20=(x-2)^2+(\frac{1}{2}x-1)^2$

$20=x^2-4x+4+\frac{1}{4}x^2-x+1$

$0=\frac{5}{4}x^2-5x-15 \quad \backslash\cdot\frac{4}{5}$

$x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$

$x=6,-2$

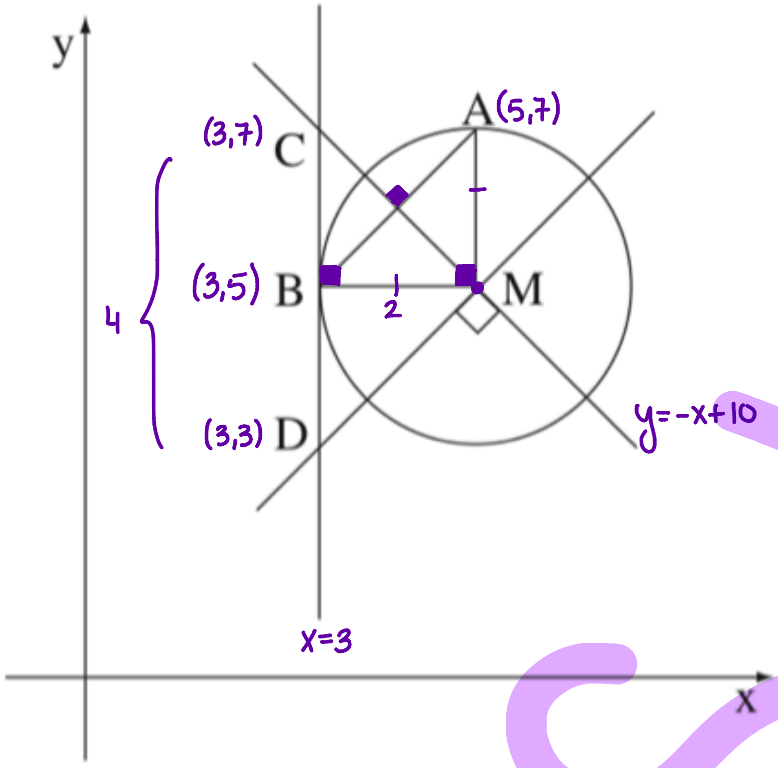
هو في الربع الأوّل: $x=6$ نجد y:

$B(6, 6\cdot\frac{1}{2}-1)$

$B(6,2)$

$A(1,2)$, $B(6,2)$ لهم نفس الـ y أي AB يوازي محور x $\Rightarrow y_{AB}=2$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ - سؤال ٢



٢. AB هو وتر في دائرة مركزها M . (MA⊥MB)

MA يوازي المحور y وَ MB يوازي المحور x .

مرّروا عبر M مستقيمين: أحد المستقيمين

يعامد AB والمستقيم الثاني يوازي AB .

مرّروا عبر B مماسًا للدائرة.

العمود يقطع المماس في النقطة C ،

والمستقيم الموازي يقطع المماس في النقطة D

(انظر الرسم).

معطى أنّ: B(3 , 5) ، A(5 , 7) .

أ. جد معادلة العمود CM .

ب. (١) جد معادلة الدائرة.

(٢) برهن بواسطة الحساب أنّ الدائرة لا تقطع المحور x.

نعوّض y=0 ونبرهن انّ لا يوجد حل

جـ. جد مساحة المثلث CMD .

أ. * $m_{AB}=\frac{7-5}{5-3}=\frac{2}{2}=1$ ← $m_{AB}\cdot m_{CM}=-1$ (AB⊥CM) ← $m_{CM}=-1$

* BM ∥ محور x   B و M لهم نفس الاحداثي y
AM ∥ محور y   A و M لهم نفس الاحداثي x
$\Big\}$ M(5,5)

* معادلة CM : $y=mx+n$ M(5,5)
$5=-1\cdot5+n$ $m=-1$
$n=10$
← $y=-x+10$

ب. (1) BM=2 نصف القطر ← معادلة الدائرة: $(x-5)^2+(y-5)^2=4$
M(5,5)

(2) نعوّض y=0 : $(x-5)^2+(0-5)^2=4$ ← $(x-5)^2+25=4$ ← $(x-5)^2=-21$ ← $\varnothing$

ج. * نجد النقطة C . نعوّض x=3 بمعادلة CM :
$y=-3+10=7$ ⟶ C(3,7)

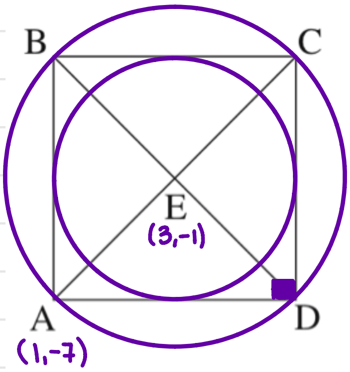
* نجد معادلة MD . BA∥MD ← $m_{BA}=m_{MD}=1$
M(5,5)
⇒ $y=mx+n$ ⇒ $y_{MD}=x$
$5=1\cdot5+n$
$n=0$

* نجد النقطة D . نعوّض x=3 بمعادلة MD :
$y=3$ D(3,3)

* الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها في نقطة التماس ← CD⊥BM

$S_{\triangle CMD}=\frac{MB\cdot CD}{2}=\frac{4\cdot2}{2}=4$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٢



٢. قطرا المربّع ABCD يلتقيان في النقطة E (انظر الرسم).

إحداثيات الرأس A هي $(1, -7)$.

معادلة القطر BD هي $x + 3y = 0$.

$3y = -x \quad \backslash :3$

$y_{BD} = -\frac{1}{3}x$

أ. (١) جد ميل القطر AC .

(٢) جد إحداثيات النقطة E .

ب. جد معادلة الدائرة التي تحصر المربّع.

جـ. احسب طول ضلع المربّع.

د. جد معادلة الدائرة المحصورة في المربّع بحيث أضلاع المربّع تمس الدائرة.

أ. (1) اقطار المربّع تتعامد بعضها البعض ، اي $BD \perp AC \Leftarrow m_{BD} \cdot m_{AC} = -1$

$-\frac{1}{3} \cdot m_{AC} = -1 \quad \backslash \cdot -3$

$m_{AC} = 3$

(2) نجد معادلة AC . لدينا ميل ونقطه : $A(1,-7) \quad m_{AC} = 3$

$y_{AC} = mx + n$

$-7 = 3 \cdot 1 + n$

$n = -10$

$\leftarrow y_{AC} = 3x - 10$

النقطه E هي تقاطع y_{AC} مع y_{BD} .

$\begin{cases} y_{AC} = 3x - 10 \\ y_{BD} = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

$3x - 10 = -\frac{1}{3}x$

$3\frac{1}{3}x = 10 \quad \backslash :3\frac{1}{3}$

$x = 3$

نعوّض : $y = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1 \quad \leftarrow E(3,-1)$

ب. نجد طول نصف القطر AE . $AE = \sqrt{(-1--7)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40}$

مركز الدائرة $E(3,-1)$

معادلة الدائرة : $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$

ج. من بند ب $\leftarrow AC = 2\sqrt{40}$. نفرض ان ضلع المربع x .

$\triangle ACD$ فيثاغورس

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$160 = 2x^2$

$80 = x^2$

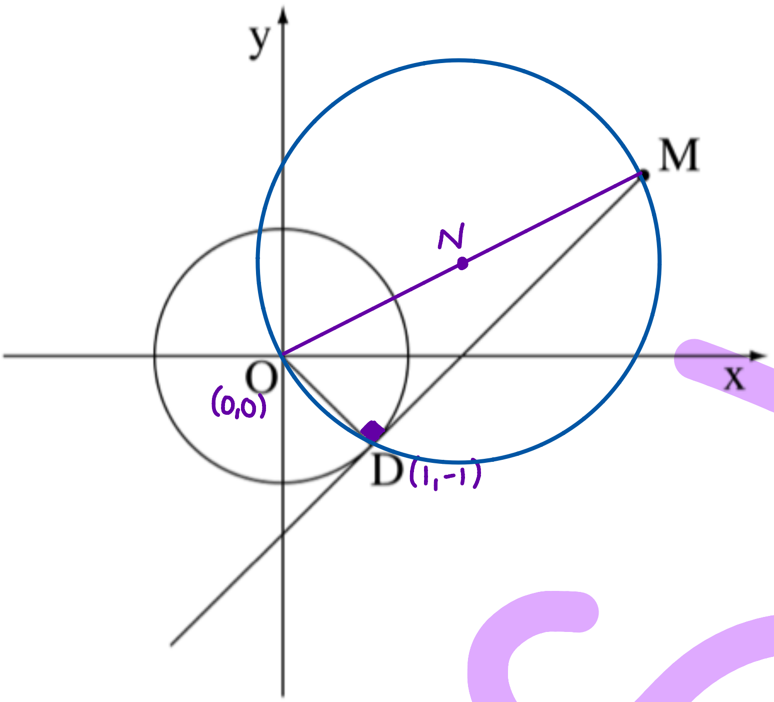
$x = \sqrt{80}$

د. للدائرة المحصورة نفس نقطة المركز $E(3,-1)$

قطر الدائرة = طول ضلع المربّع = $\sqrt{80} \leftarrow$ نصف القطر $\frac{\sqrt{80}}{2}$

$\leftarrow$ معادلة الدائرة : $(x-3)^2 + (x+1)^2 = 20$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١١ - سؤال ٢



٢ . معطاة دائرة مركزها $O(0,0)$.

مرّروا عبر النقطة M ، الموجودة في الربع الأوّل، مستقيمًا يمسّ الدائرة في النقطة $D(1,-1)$ (انظر الرسم).

أ . جد معادلة الدائرة.

ب . جد :

(١) معادلة المستقيم OD .

(٢) معادلة المماس DM .

جـ . معطى أنّ $DM = \sqrt{18}$.

جد إحداثيات النقطة M .

د . مرّروا دائرة عبر النقاط O, D, M .

جد معادلة هذه الدائرة.

أ. نجد نصف قطر الدائرة :

$$R = OD = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

معادلة الدائرة : $x^2 + y^2 = 2$

ب. (1)

$m_{OD} = \frac{-1-0}{1-0} = -1 \rightarrow y_{OD} = -x + n \Leftarrow$ المستقيم يمر عبر النقطة $(0,0)$ $\Leftarrow y_{OD} = -x$

$n = 0$

(2) الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها بنقطة التماس $\Leftarrow OD \perp MD \Leftarrow m_{OD} \cdot m_{MD} = -1$

$m_{MD} = 1$

$\Leftarrow y_{MD} = x + n$ نعوض $D(1,-1)$: $-1 = 1 + n$

$n = -2 \rightarrow y_{MD} = x - 2$

ج. M تقع على المستقيم MD ، اي احداثياتها $(x, x-2)$

$$DM = \sqrt{18}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (-1-(x-2))^2} = \sqrt{18} \quad |^2$$

$$(x-1)^2 + (-1-x+2)^2 = 18$$

$$x^2 - 2x + 1 + (1-x)^2 = 18$$

$$x^2 - 2x + 1 + 1 - 2x + x^2 = 18$$

$$2x^2 - 4x - 16 = 0 \quad \backslash :2$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$x = 4, -2 \rightarrow M$ بالربع الاول

$M(4,2)$

د. $\measuredangle ODM = 90°$

زاوية محيطيه قائمة تقابل قطر الدائرة.

$\Leftarrow OM$ قطر الدائرة. N مركز الدائرة.

N وسط لقطعة OM.

$N\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \rightarrow N(2,1)$

نصف قطر الدائرة :

$$R = ON = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

معادلة الدائرة : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ - سؤال ٢

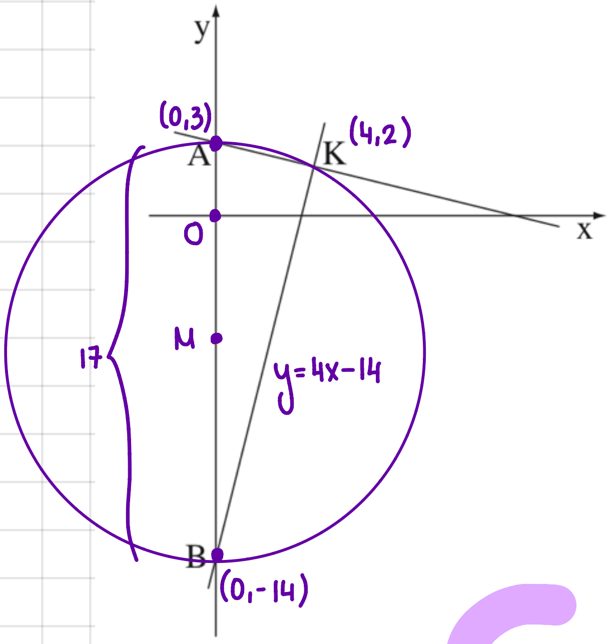
٢. يمرّ عبر النقطة K مستقيمان يقطعان المحور y في النقطتين A وَ B ،
كما هو موصوف في الرسم.
طول القطعة AB هو 17 .
معادلة المستقيم BK هي $y = 4x - 14$.

أ. جد إحداثيات النقطة A .

ب. معطى أيضًا أنّ مساحة المثلث AKB هي 34 .
جد إحداثيات النقطة K .

جـ. (١) بيّن أنّ القطعة AB هي قطر في الدائرة التي تحصر المثلث AKB .

(٢) جد معادلة الدائرة التي تحصر المثلث AKB .



أ. نجد احداثيات النقطة B التي هي نقطة تقاطع BK مع محور y ، نعوض $x=0$: $y = 4\cdot 0 - 14 = -14 \leftarrow B(0,-14)$

$A(0,3) \leftarrow AO = 3 \leftarrow OB = 14 \quad , \quad AB = 17$

ب.

$$S_{\Delta AKB} = \frac{X_K \cdot AB}{2} = \frac{X_K \cdot 17}{2} = 34 \quad |\cdot 2$$

$$17X_K = 68 \quad |:17$$

$$X_K = 4$$

نعوض بمعادلة BK $\rightarrow y = 4\cdot 4 - 14 = 2 \rightarrow K(4,2)$

ج. 1. طريقة 1 : حسب الميل

$$m_{AK} = \frac{3-2}{0-4} = -\frac{1}{4}$$

$$m_{KB} = \frac{-14-2}{0-4} = 4$$

$$m_{AK} \cdot m_{KB} = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$$

$\Leftarrow AK \perp KB$

طريقة 2 : حسب فيثاغورس

$$AK = \sqrt{(2-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$$

$$KB = \sqrt{(4-0)^2 + (-14-2)^2} = \sqrt{272}$$

$$AK^2 + KB^2 = 17 + 272 = 289 = AB^2$$

$\Leftarrow$ ΔAKB مثلث قائم الزاوية

زاوية محيطيه قائمه بالدائرة تقابل قطر الدائرة

$\Leftarrow$ AB قطر

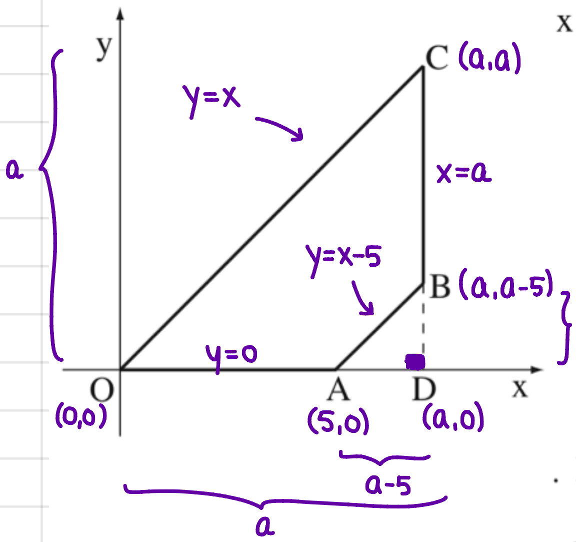
(2) $AB = 17$ قطر الدائرة $\leftarrow R = 8.5$

M مركز الدائرة , نقطة وسط AB : $M(0,-5.5)$

$(AM = MB = 8.5)$

$\Leftarrow$ معادلة الدائرة : $x^2 + (y+5.5)^2 = 72.25$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ موعد ب - سؤال ٢



٢. أضلاع الشكل الرباعي ABCO موضوعة على المحور x
وعلى المستقيم $y = x$ وعلى المستقيم $y = x - 5$
وعلى المستقيم $x = a$ (انظر الرسم).
a هو بارامتر أكبر من 5 .

أ. ما هو الشكل الرباعي ABCO ؟ علّل.

ب. جد إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي ABCO.
(عبّر بدلالة a حسب الحاجة).

جـ. المستقيم $x = a$ يقطع المحور x في النقطة D .

(١) عبّر بدلالة a عن مساحة المثلث ABD .

(٢) عبّر بدلالة a عن مساحة الشكل الرباعي ABCO .

(٣) معطى أنّ مساحة الشكل الرباعي ABCO هي 22.5 .
جد قيمة a .

أ. ABCO هو شكل رباعي به زوج واحد من الاضلاع المتقابلة المتوازية ($m_{OC} = m_{AB} = 1 \Leftarrow OC \parallel AB$)
اذاً هو شبه منحرف.

ب. A (هي تقاطع y_{OA} مع y_{AB}) أو هي تقاطع y_{AB} مع محور x ، نعوّض $y=0$ ⇐ $x-5=0$

$x=5$

$A(5,0)$

B يقع على BC اذاً احداثيات x له هو a وايضاً يقع على المستقيم AB
اذاً احداثيات y هو: $y=a-5$.

$B(a,a-5)$

C يقع على BC اذاً احداثيات x له هو a وايضاً يقع على المستقيم OC
اذاً احداثيات y هو $y=x=a$.

$C(a,a)$

$O(0,0)$ نقطة الاصل

ج. D هو تقاطع CB مع محور x ⇐ $D(a,0)$

(1) $S_{\Delta ABD} = \frac{AD \cdot BD}{2} = \frac{(a-5)^2}{2} = \frac{a^2-10a+25}{2}$

$AD = a-5$ (هو على محور x) →

$BD = a-5$ (خط يوازي محور y)

(2) نجد مساحة المثلث الكبير ΔCDO :

$S_{\Delta CDO} = \frac{OD \cdot DC}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$ ← $(CD = OD = a)$

$S_{ABCO} = S_{\Delta CDO} - S_{\Delta ABD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2-10a+25}{2} = \frac{a^2-a^2+10a-25}{2} = \frac{10a-25}{2}$

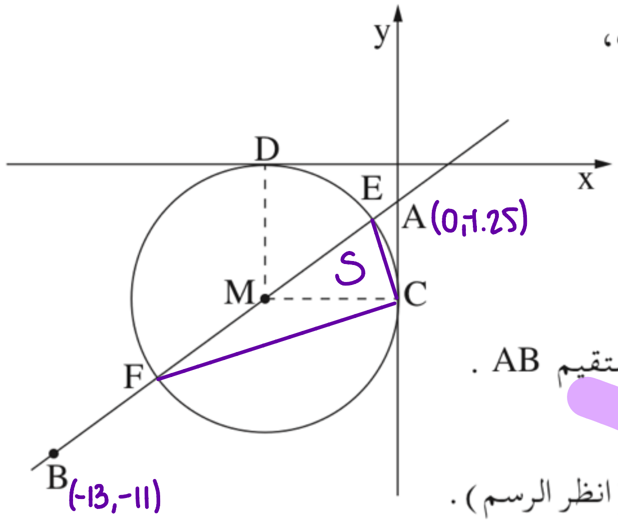
(3) $S_{ABCO} = \frac{10a-25}{2} = 22.5 \quad / \cdot 2$

$10a - 25 = 45$

$10a = 70 \quad / : 10$

$a = 7$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٢ - سؤال ٢



٢. النقطة A تقع على المحور y في جزئه السالب،
وبُعدها عن نقطة أصل المحاور هو 1.25 . $\to |y_A|$
إحداثيات النقطة B هي $(-13\,,\,-11)$
(انظر الرسم) .

أ. جد معادلة المستقيم AB .

ب. النقطة M تقع في الربع الثالث على المستقيم AB .
M هي مركز الدائرة التي تمسّ المحور x
في النقطة D والمحور y في النقطة C (انظر الرسم) .
جد إحداثيات النقطة M .

جـ. المستقيم AB يقطع الدائرة التي مركزها M في النقطتين E وَ F .
مساحة المثلث EMC هي S .
عبّر بدلالة S عن مساحة المثلث FMC . علّل .
لا حاجة لإيجاد إحداثيات E وَ F .

أ. $m_{AB}=\frac{-11--1.25}{-13-0}=0.75$ ، $B(-13,-11) \rightarrow y_{AB}=mx+n \rightarrow y_{AB}=0.75x-1.25$

$-11=0.75\cdot(-13)+n$

$n=-1.25$

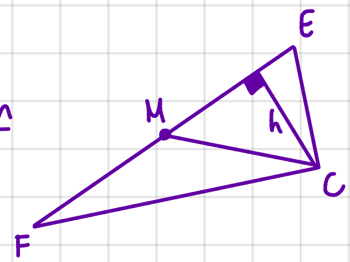
ب. $DM=MC$ انصاف اقطار $\Leftarrow$ اذا فرضنا احداثيات $D(t,0)$ اذاً $C(0,t)$ وايضاً $M(t,t)$

نعوّض النقطة M لايجاد t :
$t=0.75t-1.25$

$0.25t=-1.25 \quad /:0.25$

$t=-5 \rightarrow M(-5,-5)$

ج.



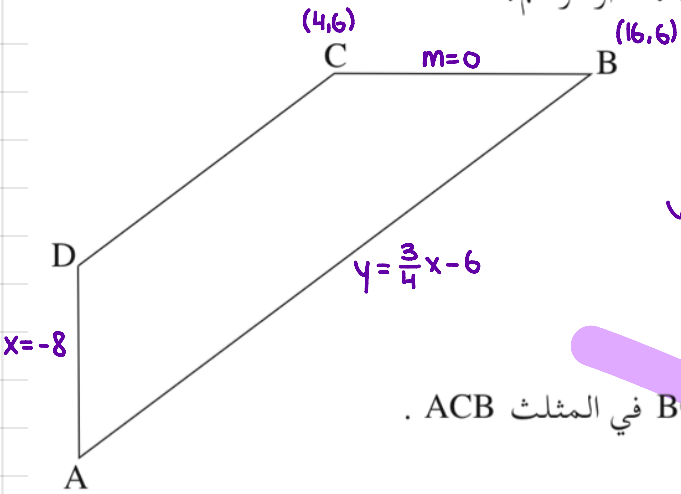
$S_{\Delta EMC}=\frac{EM\cdot h}{2}$ $\quad S_{\Delta MCF}=\frac{FM\cdot h}{2}$

معلوم انّ $EM=FM$

$\Leftarrow S_{\Delta EMC}=S_{\Delta MCF}=S$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٢

.2 معطى شبه المنحرف ABCD $(AB \parallel DC)$ ، انظر الرسم.



معادلة الضلع AB هي $y = \frac{3}{4}x - 6$.

معادلة الضلع AD هي $x = -8$.

ميل الضلع CB هو 0 .

إحداثيات الرأس C هي $(4, 6)$.

$\left.\right\} y_{CB} = 6$

أ. جد إحداثيات الرؤوس A و B و D .

ب. (1) جد طول الارتفاع على الضلع BC في المثلث ACB .

(2) جد مساحة المثلث ACB .

أ. A هو تقاطع AD و AB .

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 6 \\ x = -8 \end{cases} \rightarrow y = \frac{3}{4}\cdot(-8) - 6$, $y = -6 - 6 = -12$ $\rightarrow$ $A(-8,-12)$

B هو تقاطع CB مع AB .

$\begin{cases} y = 6 \\ y = \frac{3}{4}x - 6 \end{cases} \rightarrow 6 = \frac{3}{4}x - 6$, $12 = \frac{3}{4}x \ \backslash \cdot \frac{4}{3}$, $x = 16$ $\rightarrow$ $B(16,6)$

D هو تقاطع DC مع DA . ($DC \rightarrow ?$, $DA \rightarrow x=-8$)

نجد المعادلة DC : $DC \parallel AB \Leftarrow m_{DC} = m_{AB} = \frac{3}{4}$ $\rightarrow$ C(4,6)

$y_{DC} = mx + n$

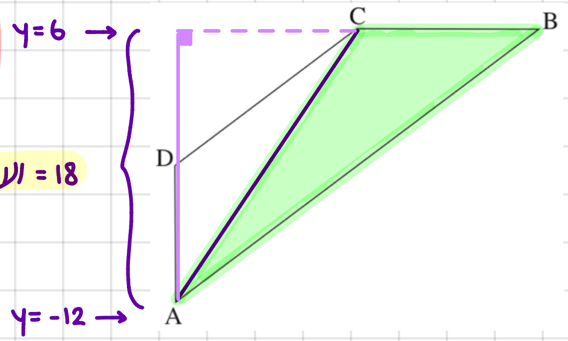
$6 = \frac{3}{4}\cdot 4 + n$

$n = 3$

$\underline{\underline{y_{DC} = \frac{3}{4}x + 3}}$

$\rightarrow \begin{cases} y_{DC} = \frac{3}{4}x + 3 \\ x = -8 \end{cases} \rightarrow y = \frac{3}{4}\cdot(-8) + 3 = -3$ $\quad$ $D(-8,-3)$

ب. (1)



(2) $CB = 16 - 4 = 12$ (بعد x-ات C و B)

$S_{\Delta ACB} = \frac{CB \cdot \text{الارتفاع}}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٢

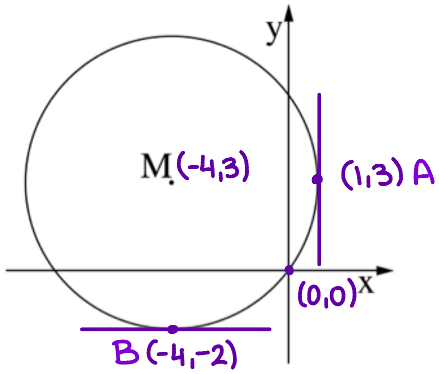
2. معطاة دائرة معادلتها $(x-a)^2+(y-3)^2=25$.

a هو بارامتر.

تمرّ الدائرة عبر نقطة أصل المحاور، ومركزها M

يقع في الربع الثاني (انظر الرسم).

x سالب، y موجب



أ. جد قيمة a .

ب. جد إحداثيات النقاط على محيط الدائرة التي

إحداثيّها الـ y أكبر بـ 2 من إحداثيّها الـ x .

نفرض احداثيات ال x هو t ← اذاً النقطه $(t,t+2)$

جـ. في كلّ واحدة من النقاط التي وجدتَها في البند "ب" يمرّرون مماسًا للدائرة.

جد معادلات هذه المماسات.

أ. نعوّض النقطه $(0,0)$ في معادلة الدائرة:

$$(0-a)^2+(0-3)^2=25$$
$$a^2+9=25$$
$$a^2=16$$
$$a=4,-4$$

$M(a,3)$ مركز الدائرة في الربع الثاني ← $a=-4$

ب. معادلة الدائرة: $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ ، نعوّض $(t,t+2)$ بمعادلة الدائرة:

$$(t+4)^2+(t+2-3)^2=25$$
$$t^2+8t+16+(t-1)^2=25$$
$$t^2+8t+16+t^2-2t+1=25$$
$$2t^2+6t-8=0 \quad \backslash:2$$
$$t^2+3t-4=0$$
$$(t+4)(t-1)=0$$
$$t_1=-4 \quad t_2=1$$

احداثيات النقاط على محيط الدائره التي تحقق $(t,t+2)$ هم: $(1,3)$, $(-4,-2)$ ⟵

ج. النقطه $\overset{A}{(1,3)}$ ومركز الدائرة $M(-4,3)$ لهم نفس احداثيات ال y ⇐ AM يوازي محور x

⇐ المماس في النقطة $A(1,3)$ يوازي محور y

⇐ معادلة المماس $x=1$

النقطه $\overset{B}{(-4,-2)}$ ومركز الدائرة $M(-4,3)$ لهم نفس احداثيات ال x ⇐ BM يوازي محور y

⇐ المماس في النقطة $B(-4,-2)$ يوازي محور x

⇐ معادلة المماس $y=-2$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٣ - سؤال ٢

2. معطاة دائرة، مركزها M موجود على المستقيم $y = 7$.

المستقيم $y = \frac{1}{2}x$ يمسّ الدائرة في النقطة $A(6, 3)$

(انظر الرسم).

أ. (1) جد إحداثيات المركز M .

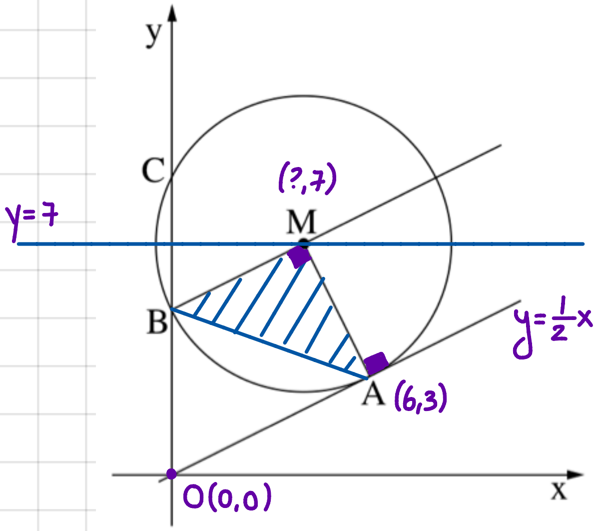
(2) جد معادلة الدائرة.

ب. الدائرة تقطع المحور y في النقطتين B وَ C .

النقطة C موجودة فوق النقطة B (انظر الرسم).

(1) بيّن أنّ المستقيم BM يوازي المستقيم الذي يمسّ الدائرة في النقطة A .

(2) جد مساحة المثلث BMA .



أ. (1) الخط النازل من مركز الدائرة لمماس يعامدها بنقطة التماس. $\Leftarrow MA \perp OA \Leftarrow m_{MA} \cdot m_{OA} = -1$ ($m_{OA} = \frac{1}{2}$)

$m_{MA} = -2$

معادلة MA : $y_{MA} = -2x + n$ نعوّض $A(6,3)$: $3 = -2 \cdot 6 + n$

$n = 15 \Leftarrow y_{MA} = -2x + 15$

نجد النقطة M : نعوّض $y=7$ بمعادلة MA : $7 = -2x + 15$

$-8 = -2x$

$x = 4$ $M(4,7)$

(2) $R = MA = \sqrt{(6-4)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{20} \Leftarrow$ معادلة الدائرة: $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$

ب. (1) نجد النقطتين B و C. هم نقاط تقاطع الدائرة مع محور y, نعوّض $x=0$: $(0-4)^2 + (y-7)^2 = 20$

$16 + (y-7)^2 = 20$

$(y-7)^2 = 4$

$y-7 = 2$ $\quad y-7 = -2$

$y = 9$ $\quad y = 5$ $\Longrightarrow$ $C(0,9)$, $B(0,5)$

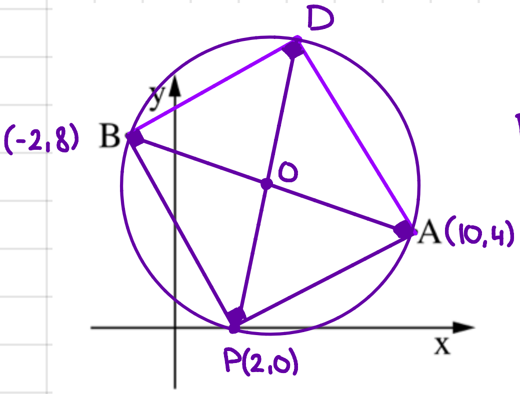
نجد ميل BM : $m_{BM} = \frac{7-5}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow m_{BM} = m_{AO} \rightarrow BM \parallel AO$

(2) $\begin{cases} MA \perp AO \\ MB \parallel AO \end{cases}$ $MB \perp MA \Leftarrow S_{AMB} = \frac{MA \cdot MB}{2}$

$MA = MB = R$ انصاف اقطار الدائرة $\Leftarrow S_{AMB} = \frac{R^2}{2}$

$S_{AMB} = \frac{20}{2} = 10$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٢



2. معطاة النقطتان $A(10,4)$ وَ $B(-2,8)$ (انظر الرسم).

النقطة P موجودة على المحور x بحيث بُعدها $P(x,0)$

عن النقطة A يساوي بُعدها عن النقطة B.

أ. جد إحداثيّات النقطة P.

النقاط A وَ B وَ P هي رؤوس للشكل الرباعيّ $ADBP$.

معطى أنّ: $BP \parallel AD$ ، $BD \parallel PA$.

ب. جد إحداثيّات الرأس D.

جـ. جد طول نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث BDA. علّل.

أ.

$P(x,0)$ $A(10,4)$ $PA=PB$ $P(x,0)$ $B(-2,8)$

$$\sqrt{(0-4)^2+(x-10)^2} = \sqrt{(0-8)^2+(x--2)^2} \quad \Big|^2$$

$$4^2+(x-10)^2 = (-8)^2+(x+2)^2$$

$$16+x^2-20x+100 = 64+x^2+4x+4$$

$$48 = 24x \quad \backslash :24$$

$$P(2,0) \leftarrow x=2$$

ب. معطى انّ $BP \parallel AD$ ، $BD \parallel PA$ $\leftarrow$ $BPAD$ شكل رباعي به كل زوج اضلاع متقابله متوازية اذاً هو متوازي الاضلاع

من بند أ $PA=PB$ $\leftarrow$ $BPAD$ متوازي الاضلاع به ضلعين متجاورين متساويين هو مستطيل.

النقطه O هي نقطة التقاء اقطار المستطيل, اي هي نقطة وسط AB $\leftarrow$ $O\left(\frac{-2+10}{2}, \frac{8+4}{2}\right)$

$O(4,6)$

هي ايضاً نقطة وسط PD, نفرض $D(x,y)$. اذاً: $\frac{0+y}{2}=6$ $\frac{2+x}{2}=4$

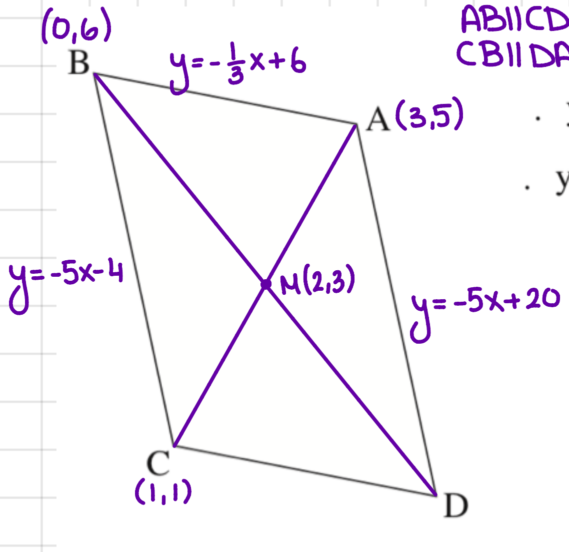
$y=12$ $2+x=8$, $x=6$ $\rightarrow$ $D(6,12)$

ج. الزاوية D هي قائمه, الزاوية المحيطيه القائمة تقابل قطر الدائره (BA)

نصف القطر $BO=OA$, نجد احدهما:

$B(-2,8)$
$O(4,6)$

$$R = BO = \sqrt{(-2-4)^2+(8-6)^2} = \sqrt{40}$$



AB || CD
CB || DA

2. معطى متوازي الأضلاع ABCD (انظر الرسم).

الضلع AB موضوع على المستقيم $y = -\frac{1}{3}x + 6$.

الضلع AD موضوع على المستقيم $y = -5x + 20$.

قطرا متوازي الأضلاع يلتقيان في النقطة (2 , 3) .

أ. جد إحداثيّات الرأس C .

ب. جد إحداثيّات الرأس B ، وإحداثيّات الرأس D .

جـ. هل الضلع BC يمسّ في النقطة C الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AC ؟ علّل.

أ. نجد النقطة A عن طريق تقاطع y_{BA} مع y_{AD} : $-\frac{1}{3}x+6 = -5x+20$

$\frac{14}{3}x = 14 \ \backslash \cdot \frac{3}{14} \rightarrow x=3 \rightarrow y=-5\cdot 3+20$

$y=5$

$\rightarrow A(3,5)$

اقطار المتوازي الاضلاع تنصّف بعضها البعض ⇐ M نقطة وسط AC

نفرض C(x,y) :

$2\cdot / \frac{x+3}{2}=2 \qquad 2\cdot / \frac{y+5}{2}=3$

$x+3=4 \qquad y+5=6$

$x=1 \qquad y=1 \quad \rightarrow C(1,1)$

ب. نجد معادلة BC : $AD \parallel BC \rightarrow -5 = m_{AD} = m_{BC}$, C(1,1) : $y_{BC} = mx+n$

$1 = -5\cdot 1 + n$

$n=6 \rightarrow y_{BC}=-5x+6$

نجد النقطة B عن طريق تقاطع y_{BC} مع y_{AB} : $-5x+6 = -\frac{1}{3}x+6$

$-\frac{3}{14} \cdot / -\frac{14}{3}x = 0$

$x=0 \rightarrow y=6 \quad B(0,6)$

M نقطة وسط BD . نفرض D(x,y) :

$2\cdot / \frac{y+6}{2}=3 \qquad 2\cdot / \frac{x+0}{2}=2$

$y+6=6 \qquad x=4$

$y=0$

$\rightarrow D(4,0)$

ج. كي يتحقق ذلك يجب ان يتحقق ان $BC \perp AC$ لان الخط النازل من مركز الدائرة للماس يعامدها في نقطة التماس.

$m_{BC} \cdot m_{AC} \stackrel{?}{=} -1$

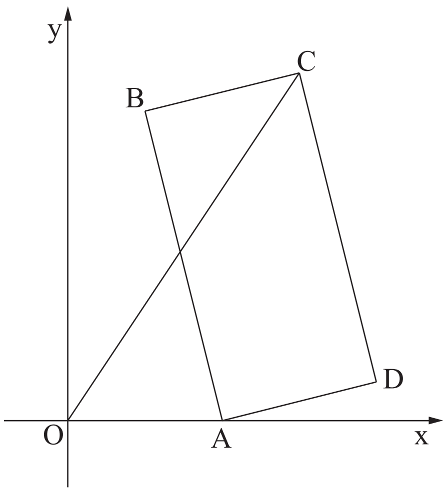
$m_{BC} = -5$ (بند ب)

$m_{AC} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

$-5 \cdot 2 \neq -1$

كلا

السؤال 2



في المستطيل ABCD الرأس A يقع على المحور x (انظر الرسم).

الإحداثيّ y للرأس B هو 8 .

معادلة الضلع BC هي $y = \frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$.

معادلة المستقيم OC (O — نقطة أصل المحاور)

هي $y = 1.5x$.

أ. جد إحداثيّات الرأس B والرأس C .

ب. (1) جد إحداثيّات الرأس A .

(2) جد إحداثيّات نقطة التقاء قطرَي المستطيل.

جـ. جد مساحة المثلّث OAD .

إجابة السؤال 2

أ. نعوّض $y = 8$

في معادلة الضلع BC ، وينتج: $8 = \frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

الإحداثيّ x لِـ B : $x_B = 2$

لذلك إحداثيّات الرأس B هي: $B(2, 8)$

C هي نقطة التقاء BC وَ OC ،

لذلك في النقطة C يتحقّق: $\frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2} = 1.5x$

$\Downarrow$

الإحداثيّ x لِـ C : $x_C = 6$

الإحداثيّ y لِـ C : $y_C = 1.5 \cdot 6 = 9$

لذلك إحداثيّات الرأس C هي: $C(6, 9)$

/يتبع في صفحة 4/

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. (1) الرأس A على المحور x ،

لذلك الإحداثيّ y لِـ A : $y_A = 0$

AB ⊥ BC ، لذلك ميل AB هو : $-\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$

$$\Downarrow$$

$$-4 = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$\Downarrow$$

$$-4 = \frac{0-8}{x_A - 2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_A = 4$$

لذلك إحداثيّات الرأس A هي : $A(4, 0)$

(2) نقطة التقاء القطرين هي منتصف القطر،

لذلك إحداثيّات نقطة الالتقاء تحقّق : $x = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$

$$y = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{9+0}{2} = 4.5$$

إحداثيّات نقطة الالتقاء هي : $(5, 4.5)$

جـ. إحداثيّات A وَ D ليست سالبة، لذلك في المثلّث OAD

ارتفاع المثلّث على الضلع OA هو الإحداثيّ y لِـ D ،

وطول الضلع OA هو الإحداثيّ x لِـ A ،

لذلك مساحة المثلّث OAD هي : $S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \cdot y_D \cdot x_A$

وجدنا أنّ التقاء القطرين هو (5 , 4.5) ،

لذلك الإحداثيّ y لِـ D يحقّق : $\frac{y_B + y_D}{2} = 4.5$

$$\Downarrow$$

$$\frac{8 + y_D}{2} = 4.5$$

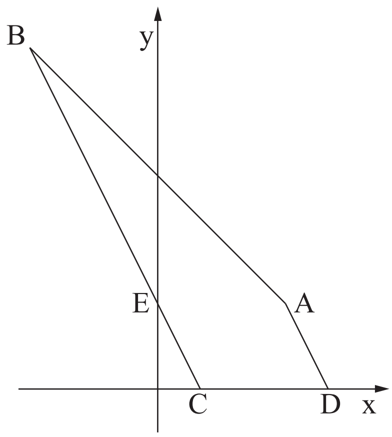
$$\Downarrow$$

$$y_D = 1$$

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$$

/يتبع في صفحة 5/

السؤال 2



ABCD هو شكل رباعيّ فيه $BC \parallel AD$.

الضلع AB موضوع على المستقيم $x + y = 10$ ،

والضلع CD موضوع على المحور x .

معطى أنّ: $C(2 , 0)$ ، $D(8 , 0)$ ،

الإحداثيّ x للنقطة A هو 6 .

أ. جد الإحداثيّ y للنقطة A.

ب. جد معادلة المستقيم AD.

جـ. جد إحداثيّات النقطة B.

د. المستقيم BC يقطع المحور y في النقطة E.

(1) بيّن أنّ المستقيم AE يوازي المحور x .

(2) جد مساحة المثلّث AEB .

إجابة السؤال 2

أ. النقطة A تقع على المستقيم الذي معادلته: $x + y = 10$

الإحداثيّ x للنقطة A هو: $x = 6$

$\Downarrow$

$y = 4$

لذلك إحداثيّات النقطة A هي: $A(6 , 4)$

ب. معطاة النقطتان: $A(6 , 4) \quad , \quad D(8 , 0)$

ميل المستقيم AD هو: $m_{AD} = \frac{4-0}{6-8} = \frac{4}{-2} = -2$

معادلة المستقيم AD حسب نقطة وميل هي: $y - 0 = -2(x - 8)$

$\Downarrow$

$y = -2x + 16$

جـ. $AD \parallel BC$ ، لذلك ميل المستقيم BC هو: -2 (ميلا المستقيمَيْن المتوازيَيْن متساويان)

معادلة المستقيم BC
حسب النقطة $C(2 , 0)$ والميل -2 هي: $y = -2x + 4$

النقطة B هي نقطة تقاطُع
المستقيمين AB وَ BC ، لذلك يتحقّق: $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

$\Downarrow$

$x = -6 \quad , \quad y = 16$

لذلك، إحداثيّات النقطة B هي: $B(-6 , 16)$

/يتبع في صفحة 4/

تكملة إجابة السؤال 2.

د. (1) النقطة E تقع على المستقيم BC

والإحداثيّ x للنقطة هو 0 ، لذلك يتحقّق: $y = -2 \cdot 0 + 4$

$\Downarrow$

$y = 4$

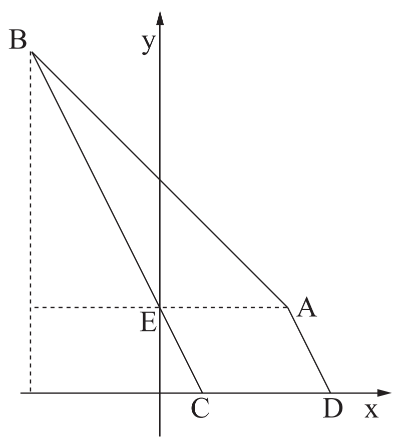
إحداثيّات النقطة E هي: $E(0, 4)$

إحداثيّات النقطة A هي: $A(6, 4)$

ميل المستقيم AE هو: $m_{AE} = \frac{4-4}{0-6} = 0$

$\Downarrow$

ميل المستقيم AE هو 0 ، لذلك المستقيم AE يوازي المحور x



(2) طول القطعة AE هو: $AE = x_A - x_E = 6$

طول الارتفاع على الضلع AE
في المثلّث AEB هو: $y_B - y_E = 16 - 4 = 12$

مساحة المثلّث AEB هي: $S_{\triangle AEB} = \frac{AE \cdot (y_B - y_E)}{2}$

$\Downarrow$

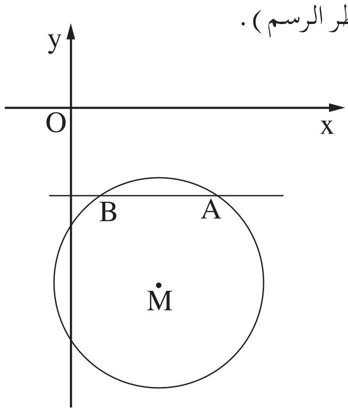
$S_{\triangle AEB} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$

/يتبع في صفحة 5/

السؤال 2

المستقيم $y = -3$ يقطع دائرة في النقطتين A وَ B (انظر الرسم).

النقطة A تقع أيضًا على المستقيم $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.



أ. جد إحداثيّات النقطة A .

ب. معطى أنّ مركز الدائرة هو $M(3, -6)$.
جد معادلة الدائرة.

جـ. جد مساحة الشكل الرباعيّ $OAMB$
(O — نقطة أصل المحاور).

إجابة السؤال 2

أ. المستقيم $y = -3$ يوازي المحور x ،

لذلك الإحداثيّ y لِـ A هو: $y_A = -3$

نعوّض $y = -3$ في معادلة المستقيم، وينتج: $-3 = -\frac{2}{3}x_A + \frac{1}{3}$

$$\Downarrow$$

$$x_A = 5$$

إحداثيّات A هي: $A(5, -3)$

ب. حسب المعطى إحداثيّات المركز هي: $M(3, -6)$

من هنا مربّع نصف القطر هو: $R^2 = MA^2 = (5-3)^2 + (-3+6)^2 = 13$

لذلك، معادلة الدائرة هي: $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 13$

/يتبع في صفحة 4/

تكملة إجابة السؤال 2.

جـ. الشكل الرباعيّ OABM مكوَّن من مثلّثين:
$\triangle OAB$ وَ $\triangle ABM$ ،

لذلك مساحة الشكل الرباعيّ هي: $S_{AOBM} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle ABM}$

الارتفاع من O على AB هو: $0 - (-3) = 3$

الارتفاع من $M(3, -6)$ على AB هو: $-3 - (-6) = 3$

لذلك، للمثلّثين OAB وَ ABM
قاعدة مشتركة AB ونفس الارتفاع على هذه القاعدة، لذلك: $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle ABM}$

B على المستقيم $y = -3$ ، لذلك $y_B = -3$.
نعوّض $y = -3$ في معادلة الدائرة
ونجد الإحداثيّ x لِـ B : $(x_B - 3)^2 + (-3 + 6)^2 = 13$

$\Downarrow$

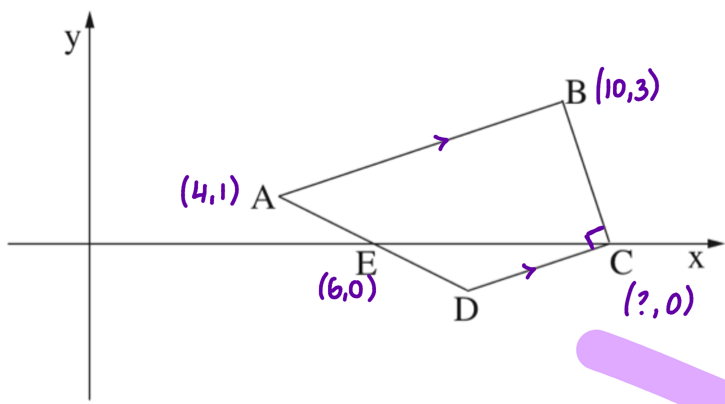
$x_B \neq 5$ لأنّ $B \neq A$ ، لذلك: $x_B = 1$

من هنا: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (5 - 1) = 6$

$S_{AOBM} = 2 \cdot S_{\triangle OAB} = 2 \cdot 6 = 12$

/يتبع في صفحة 5/

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٥ - سؤال ٢



2. الرأس C في الشكل الرباعيّ ABCD يقع على المحور x (انظر الرسم).
معطى أنّ: $A(4\,,1)$ ، $B(10\,,3)$ ،
$AB \parallel DC$ ،
$\sphericalangle BCD = 90^o$.

أ. جد إحداثيّات الرأس C .

المستقيم AD يمرّ عبر النقطة $E(6\,,0)$.

ب. هل النقطة E هي منتصف الضلع AD ؟ علّل.

جـ. هل EC هو قطر في الدائرة التي تحصر المثلّث EDC ؟ علّل.

أ. $AB \parallel BC$ ، $\sphericalangle C = 90^\circ \Leftarrow \sphericalangle B = 90^\circ \Leftarrow (AB \perp BC) \Leftarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

(ABCD شبه منحرف قائم الزاوية)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{10-4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$m_{BC} = -3$

نجد معادلة BC : $y_{BC} = -3x + n$ نعوّض $(10,3)$: $3 = -3 \cdot 10 + n$

$n = 33 \Rightarrow \underline{y_{BC} = -3x + 33}$

C تقاطع BC مع محور x :

نعوّض $y=0$ بمعادلة BC : $0 = -3x + 33$

$3x = 33$

$x = 11$

$C(11,0)$

ب. نجد معادلة CD : $m_{CD} = m_{AB} = \frac{1}{3}$
(مستقيمين متوازيين)

$\leftarrow y_{CD} = \frac{1}{3}x + n$ نعوّض $C(11,0)$: $0 = \frac{1}{3} \cdot 11 + n \rightarrow n = -\frac{11}{3}$

$\underline{y_{CD} = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}}$

نفرض انّ E وسط القطعه AD والنقطه D هو (x,y) ، نجد النقطه D :

$E\left(\frac{4+x}{2} = 6\,,\ \frac{1+y}{2} = 0\right)$

$4 + x = 12 \qquad 1 + y = 0$

$x = 8 \qquad y = -1 \longrightarrow D(8,-1)$

نفحص اذا النقطه D تقع على y_{CD} $\longrightarrow$

$y_{CD} = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$

$-1 = \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{11}{3}$

$-1 = -1$ ✓

نعم E هي وسط القطعة AD

ج. كي يكون EC قطر دائرة يجب ان تكون الزاويه المحيطيه التي تقابله قائمه. اي نفحص اذا $\sphericalangle D \overset{?}{=} 90$

اي نفحص هل $AD \perp DC$ ، اي نفحص هل ضرب ميولهم -1 .

$m_{AD} \cdot m_{DC} \overset{?}{=} -1$

$\frac{1-0}{4-6} = \frac{1}{-2}$ ، $\frac{1}{3}$

$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \neq -1$

كلا

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٢

2. معطى أنّ الدائرة التي معادلتها $(x-3)^2+(y+k)^2=25$ ، تمرّ عبر نقطة أصل المحاور $(0,0)$.
k هو بارامتر.

أ. (1) جد قيمتَي k .

(2) اكتب معادلتَي الدائرتين اللتين تلائمان قيمتَي k اللتين وجدتَهما .

ب. جد نقاط تقاطُع كلّ واحدة من الدائرتين مع المحورين.

جـ. ارسم الدائرتين في هيئة محاور واحدة .

د. المستقيم $x=a$ يمسّ الدائرتين، $a>0$.

(1) جد a.

(2) ما هي إحداثيّات نقطتَي التماسّ؟

أ. (1) $(0,0)$ على محيط الدائرة. نعوّض النقطة ونجد k :

$$(0-3)^2+(0+k)^2=25$$
$$9+k^2=25$$
$$k^2=16 \rightarrow k=\pm 4$$

(2) $k=4 \rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$

$k=-4 \rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25$

ب. الدائرة $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

تقاطع مع x : $(y=0)$

$$(x-3)^2+\overbrace{(0+4)^2}^{16}=25$$
$$(x-3)^2=9$$

$x-3=3$ ، $x-3=-3$

$x=6$ ، $x=0$

$(6,0)$ ، $(0,0)$

تقاطع مع y : $(x=0)$

$$\overbrace{(0-3)^2}^{9}+(y+4)^2=25$$
$$(y+4)^2=16$$

$y+4=4$ ، $y+4=-4$

$y=0$ ، $y=-8$

$(0,0)$ ، $(0,-8)$

الدائرة $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

تقاطع مع x : $(y=0)$

$$(x-3)^2+\overbrace{(0-4)^2}^{16}=25$$
$$(x-3)^2=9$$

$x-3=3$ ، $x-3=-3$

$x=6$ ، $x=0$

$(6,0)$ ، $(0,0)$

تقاطع مع y : $(x=0)$

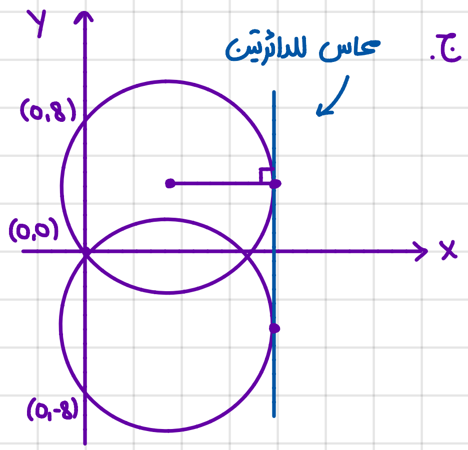
$$\overbrace{(0-3)^2}^{9}+(y-4)^2=25$$
$$(y-4)^2=16$$

$y-4=4$ ، $y-4=-4$

$y=8$ ، $y=0$

$(0,8)$ ، $(0,0)$

ج. مماس للدائرتين



د. (1)+(2) $x=a$ مستقيم يوازي محور y

الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها بنقطة التماس.

حسب الرسمة مركز الدائرة التي فوق : $(3,4)$ ونصف قطرها 5.

نصف القطر يوازي محور x (لان $x=a$ يوازي محور y).

اي البعد بين مركز الدائرة ونقطة التماس هو 5.

⇐ نقطة التماس : $(8,4)$. ⇐ $a=8$

نعوّض $x=8$ بمعادلة الدائرة الثانيه لإيجاد نقطة التماس :

$$\overbrace{(8-3)^2}^{25}+(y+4)^2=25$$
$$(y+4)^2=0 \rightarrow y=-4 \rightarrow (8,-4)$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ موعد ب - سؤال ٢

.2 معطى مثلّث قائم الزاوية فيه $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

الضلع AB موضوع على المستقيم $3x - 4y = 12$.

المستقيم يقطع المحور x في النقطة B

والمحور y في النقطة D .

الضلع AC يوازي المحور x .

النقطة D هي منتصف الضلع AB

(انظر الرسم).

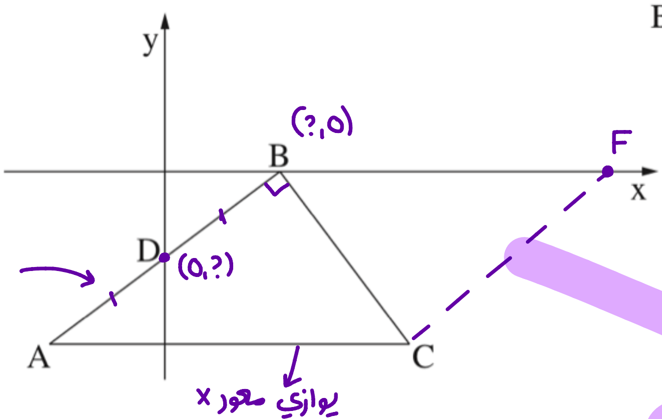
أ. جد معادلة الضلع AC .

ب. جد إحداثيّات النقطة C .

جـ. معطى أنّ الشكل الرباعيّ BACF هو متوازي أضلاع (BF ∥ AC , AB ∥ CF).

جد إحداثيّات النقطة F .

د. جد مساحة متوازي الأضلاع BACF .



$3x-4y=12$

$-4y=12-3x$

$y_{AB}=\frac{3}{4}x-3$

أ. يقعوا A,D,B على المستقيم y_{AB} . B تقاطع المستقيم مع محور x ، نعوّض $y=0$:

$0=\frac{3}{4}x-3$

$3=\frac{3}{4}x \quad \backslash\cdot\frac{4}{3}$

$x=4$

$\underline{B(4,0)}$

D تقاطع المستقيم مع محور y ، نعوّض $x=0$: $y=\frac{3}{4}\cdot 0-3=-3$ $\underline{D(0,-3)}$

D نقطة وسط القطعة AB ، نفرض $A(x,y)$ ⇐ $D(0,-3)=\left(\frac{x+4}{2},\frac{y+0}{2}\right)$

$\frac{x+4}{2}=0$ $\quad$ $\frac{y+0}{2}=-3$

$x=-4$ $\quad$ $y=-6$

$\underline{A(-4,-6)}$ ⇒

المستقيم AC يوازي محور x ⇐ ميله صفر ⇐ حسب النقطة A : $y_{AC}=-6$

ب. C يقع على المستقيم AC ⇐ $C(x_c,-6)$

$AB\perp BC$ ⇐ $m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$ ⇐ $m_{BC}=-\frac{4}{3}$ = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\frac{0--6}{4-x_c}$ ⇐ $\frac{6}{4-x_c}=-\frac{4}{3}$

$\frac{3}{4}$ (معطى)

$18=-16+4x_c$

$4x_c=34$

$x_c=8.5$

$C(8.5,-6)$ ←

ج. مدينا CF على الرسم. بالمتوازي الاضلاع كل زوج ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين.

$AC=BF$

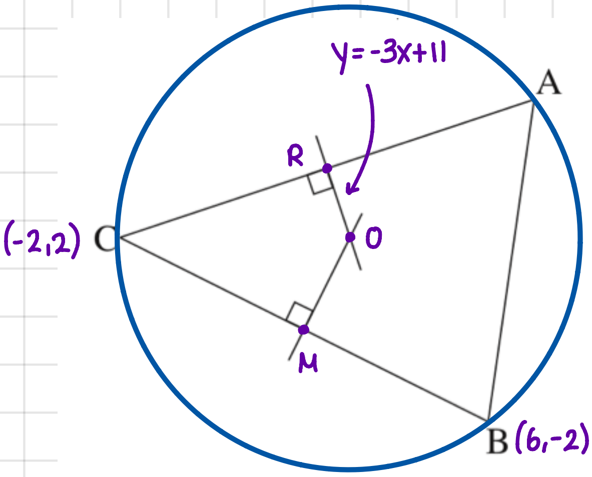
$A(-4,-6)$, $C(8.5,-6)$ ⟶ $AC=12.5$ $\quad$ $B(4,0)$ ⟶ $F(16.5,0)$

د. $BA=\sqrt{(4--4)^2+(0--6)^2}=10$

$BC=\sqrt{(8.5-4)^2+(-6-0)^2}=7.5$

⇐ $S_{BACF}=BA\cdot BC=10\cdot 7.5=75$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٦ - سؤال ٢



2. معطى المثلّث ABC (انظر الرسم).
اثنان من رؤوس المثلّث هما
$C(-2, 2)$ ، $B(6, -2)$.
أ. جد معادلة العمود المتوسّط للضلع BC .
معادلة العمود المتوسّط للضلع AC
هي $y = -3x + 11$.
ب. جد معادلة الدائرة التي تحصر المثلّث ABC .
جـ. (1) هل العمود المتوسّط للضلع AC يمرّ عبر الرأس B ؟ علّل.
(2) هل BA = BC ؟ علّل.

أ. MO عامود متوسط للضلع CB

$MO \perp CB$

$m_{MO} \cdot m_{CB} = -1$

$m_{MO} \cdot \frac{2--2}{-2-6} = -1$

$m_{MO} \cdot -\frac{1}{2} = -1$

$m_{MO} = 2$

M وسط القطعة CB

$M\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+-2}{2}\right)$

$M(2,0)$

نعوّض M $\Leftarrow$

$y_{CB} = 2x+n$

$0 = 2 \cdot 2 + n$

$n = -4$

$y_{MO} = 2x - 4$

ب. نقطة التقاء الاعمدة المتوسطه في المثلث هي مركز الدائرة التي تحصر المثلث.

$\Leftarrow$ تقاطع RO مع OM هو مركز الدائرة :

$y_{RO} = y_{MO}$

$-3x + 11 = 2x - 4$

$15 = 5x$

$x = 3 \rightarrow y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

$O(3,2)$

$\Leftarrow CO = AO = BO = R$
نصف قطر الدائرة

$CO = \sqrt{(-2-3)^2 + (2-2)^2} = 5$

معادلة الدائرة $\leftarrow$

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$

جـ. (1) نعوّض النقطة B بمعادلة المستقيم RO :

$y = -3x + 11$

$-2 = -3 \cdot 6 + 11$

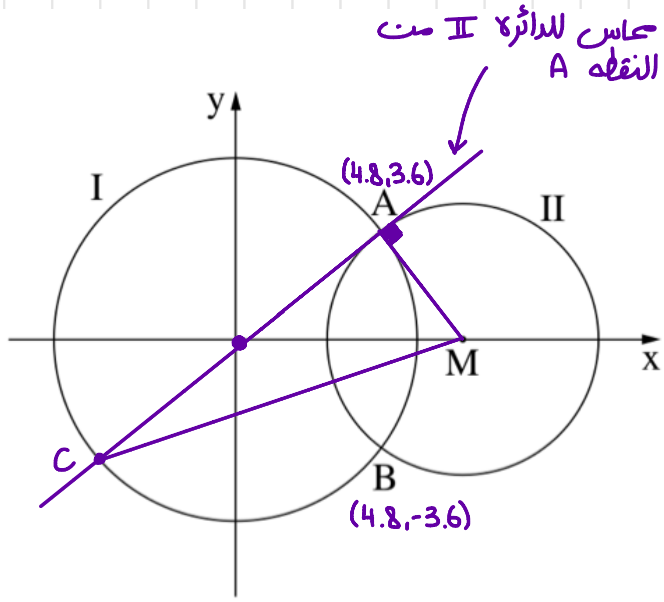
$-2 \neq -7$

كلا لا يمر

(2) يمكن برهانه حسب حسابة البعد بين نقطتين. $BA \neq BC$

او يمكن تفسير : اذا تحقق ان BA=BC ، اذاً $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين ، وبالمثلث المتساوي الساقين الارتفاع للقاعدة والمتوسط للقاعدة ومنصّف زاوية الرأس يتطابقو ، لكن بالسؤال هنا RO هو متوسط وارتفاع لكنه ليس منصّف زاويه (لا يمر عبر النقطه B)
اذاً $BA \neq BC$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٦ - سؤال ٢



2. معطاة الدائرتان I وَ II :

I. $x^2+y^2 = 36$ ← مركز الدائرة (0,0) نصف قطرها 6

II. $(x-7.5)^2+y^2 = 20.25$ مركز الدائرة (7.5,0) نصف قطرها 4.5

تتقاطع الدائرتان في النقطتين A وَ B .

A تقع في الربع الأوّل (انظر الرسم) .

أ. جد إحداثيّات النقطتين A وَ B .

ب. مرّروا عبر النقطة A مماسًّا للدائرة II .
جد معادلة المماسّ.

جـ. المماسّ الذي وجدتَه في البند "ب"
يقطع الدائرة I في نقطة إضافيّة، C .
جد مساحة المثلّث ACM . M – مركز الدائرة II .

أ. النقطتين A و B هما نقطتي تقاطع الدائرتين :

$$\begin{cases} I & x^2+y^2=36 \\ II & (x-7.5)^2+y^2=20.25 \quad - \end{cases}$$

$$x^2-(x-7.5)^2=15.75$$
$$x^2-(x^2-15x+56.25)=15.75$$
$$15x-56.25=15.75 \quad /+56.25$$
$$15x=72 \quad /:15$$
$$x=4.8$$

نعوّض بالمعادلة I

$$y^2=36-x^2$$
$$y^2=36-4.8^2$$
$$y^2=12.96 \rightarrow y=\pm3.6 \rightarrow A(4.8,3.6) \quad B(4.8,-3.6)$$

ب. نجد النصف قطر AM ونجد ميله : $M(7.5,0),A(4.8,3.6)$: $m_{AM}=\frac{3.6-0}{4.8-7.5}=-\frac{4}{3}$

الخط النازل من مركز الدائرة II للمماس يعامدها في نقطة التماس A : $MA \perp$ المماس في A

⇐ ضرب ميولهم -1 $\quad m_{AM}\cdot m_{المماس}=-1$

$-\frac{4}{3}\cdot m_{المماس}=-1 \quad /\cdot -\frac{3}{4} \quad \leftarrow \quad m_{المماس}=\frac{3}{4}$

نجد معادلة المماس، لدينا ميل ونقطة : $m=\frac{3}{4}$ ، $A(4.8,3.6)$ ←

$$y=mx+n$$
$$3.6=\frac{3}{4}\cdot4.8+n$$
$$n=0$$

← $y=\frac{3}{4}x$ المماس

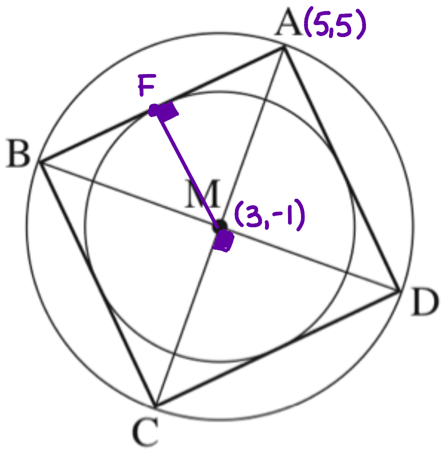
ج. *المماس الذي وجدناه في البند ب يقطع محور y في النقطة (0,0) , اي يمر عبر مركز الدائرة I

⇐ AC = قطر الدائرة I = 12

* AM = نصف قطر الدائرة I = 4.5

$$S_{\triangle AMC}=\frac{AM\cdot AC}{2}=\frac{12\cdot4.5}{2}=27$$ ← وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٦ موعد ب - سؤال ٢



2. قطرا المربّع ABCD يلتقيان في النقطة M (انظر الرسم).

إحداثيّات الرأس A هي (5,5) .

معادلة قطر المربّع، BD هي $y = -\frac{1}{3}x$.

أ. جد معادلة قطر المربّع، AC .

ب. جد معادلة الدائرة التي تحصر المربّع.

جـ. احسب طول ضلع المربّع.

د. احسب طول نصف قطر الدائرة المحصورة في المربّع (انظر الرسم).

أ. اقطار المربّع تتعامد بعضها البعض $BD \perp AC$ ⇐ ضرب ميولهم $m_{BD} \cdot m_{AC} = -1$

$-\frac{1}{3} \cdot m_{AC} = -1 \quad / \cdot -3$

$m_{AC} = 3$

نجد معادلة القطر AC , لدينا ميل ونقطة : $y = mx + n$ $\quad A(5,5) \quad m = 3$

$5 = 3 \cdot 5 + n$

$n = -10$

$\boxed{y_{AC} = 3x - 10}$ ←

ب. اقطار المربّع متساوية وتنصّف بعضها $(AM = BM = CM = DM)$ اي النقطة M هي مركز الدائرة.

نجد مركز الدائرة عن طريق تقاطع القطرين AC و BD :

$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x \\ y = 3x - 10 \end{cases}$ ←

$-\frac{1}{3}x = 3x - 10$

$10 = 3\frac{1}{3}x$

$x = 3$

$y = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1 \longrightarrow M(3,-1)$

نجد طول النصف قطر AM : $AM = \sqrt{(5-3)^2 + (5--1)^2} = \sqrt{40}$

⇐ معادلة الدائرة التي تحصر المربّع : $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$

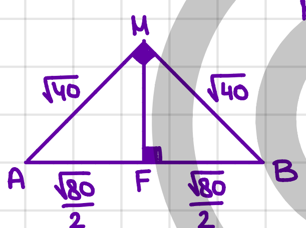
جـ. $\Delta AMB \quad AM = BM = \sqrt{40}$ ← فيثاغورس : $AB^2 = (\sqrt{40})^2 + (\sqrt{40})^2$

$AB^2 = 80$

$AB = \sqrt{80}$ ضلع المربّع (بالمربّع كل اضلاعه متساوية)

د. اضلاع المربّع تمس الدائرة المحصورة في المربّع. نجد MF , F نقطة تماس.

الخط النازل من مركز الدائرة للماس يعامدها في نقطة التماس ← $MF \perp AB$



المثلث ΔABF هو مثلث قائم ومتساوي الساقين , MF عامود على القاعدة

اذاً هو ايضاً متوسط : $BF = FA = \frac{\sqrt{80}}{2}$

نجد قطر الدائرة المحصورة (MF) حسب فيثاغورس : $MF^2 + \left(\frac{\sqrt{80}}{2}\right)^2 = (\sqrt{40})^2$

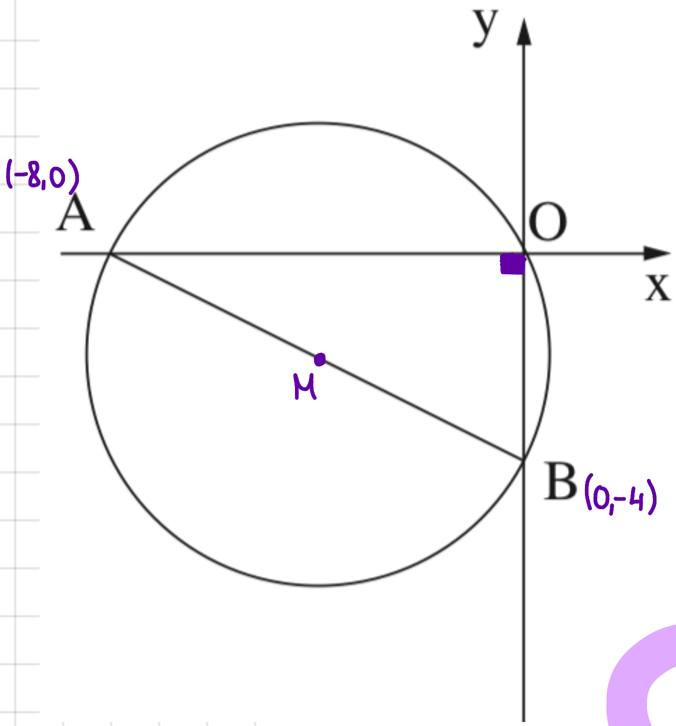
$MF^2 + 20 = 40$

$MF^2 = 20$

$MF = \sqrt{20}$ ←

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٧ - سؤال ٢

2. دائرة مركزها M تمرّ عبر نقطة أصل المحاور O .
الدائرة تقطع المحور x في نقطة إضافيّة $A(-8,0)$ ،
وتقطع المحور y في نقطة إضافيّة $B(0,-4)$
(انظر الرسم) .



أ. هل AB هو قطر في الدائرة؟ علّل إجابتك .
ب. جد معادلة الدائرة .
جـ. النقطة C تقع على محيط الدائرة في الربع الثالث (لكن ليس على المحورين)، بحيث مساحة المثلّث BOC هي 16 .
(1) جد الإحداثيّ x للنقطة C .
(2) جد الإحداثيّ y للنقطة C .
د. احسب مساحة المثلّث BMC .

أ. المحاورين x و y متعامدة $\angle AOB=90^\circ$. زاوية محيطية قائمة تقابل قطر الدائرة ⇐ AB قطر

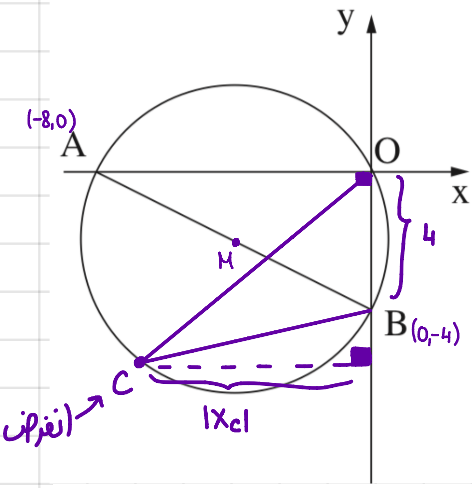
ب. AB قطر الدائرة . M مركز الدائرة ← M نقطة وسط AB ← $M\left(\frac{-8+0}{2}, \frac{0+-4}{2}\right)$ ← $M(-4,-2)$

نجد طول AB
طريقة 1 قانون البعد: $AB=\sqrt{(-8-0)^2+(0--4)^2}=\sqrt{80}$
طريقة 2 فيثاغورس ΔAOB: $AB^2=8^2+4^2$ ، $AB=\sqrt{80}$

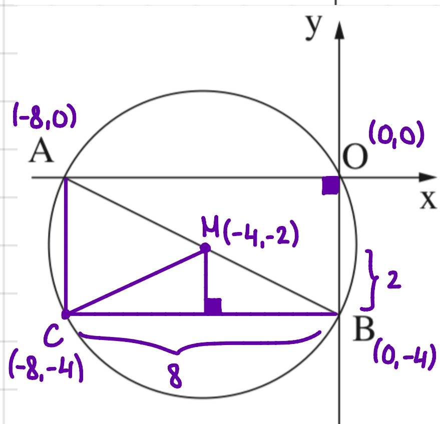
⇐ نصف قطر الدائرة $R=\frac{\sqrt{80}}{2}$

⇐ معادلة الدائرة : $(x+4)^2+(y+2)^2=20$

ج1. $S_{\Delta COB}=\frac{OB\cdot|x_C|}{2} \rightarrow 16=\frac{4\cdot|x_C|}{2} \;/\cdot 2 \rightarrow 32=4\cdot|x_C|$
$|x_C|=8$
C) بالربع الثالث $x_C=-8$



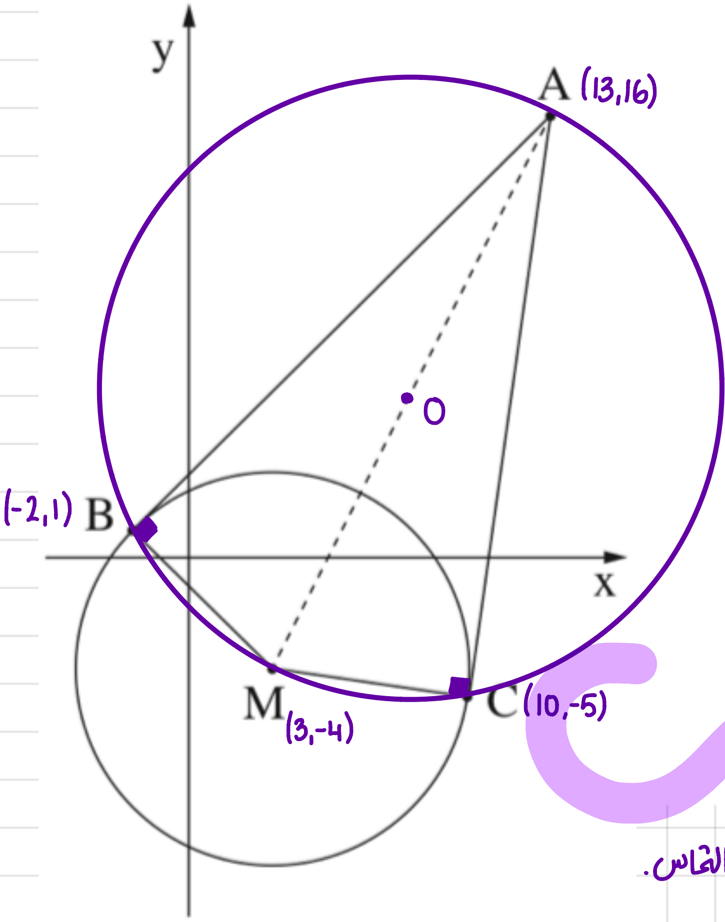
ج2. النقطة C تقع على محيط الدائرة , نعوّض $x=-8$ بمعادلة الدائرة :
$(-8+4)^2+(y+2)^2=20$
$16+y^2+4y+4=20$
$y^2+4y=0$
$y(y+4)=0 \rightarrow y=0,-4 \rightarrow C(-8,-4)$



ج3. ⇐ AOBC مستطيل . المثلث BMC , القاعدة BC هو 8 .
الارتفاع عليه هو من النقطة M الذي هو $|y_{BC}-y_M|=|-4--2|=2$

$S_{\Delta BMC}=\frac{2\cdot 8}{2}=8$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٢



2. النقطتان $B(-2,1)$ وَ $C(10,-5)$
تقعان على محيط دائرة مركزها $M(3,-4)$.
من النقطة A ، التي خارج الدائرة، تخرج قطعتان
تمسّان الدائرة في النقطتين B وَ C،
كما هو موصوف في الرسم.

أ. (1) جد معادلتَي المستقيمين AB وَ AC .
(2) جد إحداثيّات النقطة A .

ب. (1) جد طول القطعة AM .
(2) جد معادلة الدائرة التي تحصر المثلّث ABM .
(3) هل تقع النقطة C على محيط الدائرة التي وجدتَ معادلتها؟ علّل تحديدك .

أ1. الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها بنقطة التماس.

$\Leftarrow MC \perp CA$ $\quad MB \perp BA$

$m_{MB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1--4}{-2-3} = \frac{5}{-5} = -1$

$m_{MC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4--5}{3-10} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$

$\longrightarrow$ (ضرب ميولهم -1)

$\Leftarrow m_{MC}\cdot m_{CA} = -1$ $\qquad m_{MB}\cdot m_{BA} = -1$

$-\frac{1}{7}\cdot m_{CA} = -1$ $\qquad -1\cdot m_{BA} = -1$

$m_{CA} = 7$ $\qquad m_{BA} = 1$

$\Downarrow$ $\qquad \Downarrow$

$y = mx+n \quad C(10,-5)$ $\qquad y = mx+n \quad B(-2,1)$

$-5 = 7\cdot 10 + n$ $\qquad 1 = 1\cdot(-2)+n$

$n = -75$ $\qquad n = 3$

$\Leftarrow$ $y_{BA} = x+3$ $\qquad y_{AC} = 7x-75$

أ2. A هي نقطة التقاء الخطين البيانيين من بند أ1 :

$7x-75 = x+3$

$6x = 78 \quad \backslash :6$

$x = 13$

$y = x+3 = 13+3 = 16$

$\Leftarrow A(13,16)$

ب1. قانون البعد : $AM = \sqrt{(13-3)^2+(16--4)^2} = \sqrt{500} = 22.36$

ب2. الدائرة التي تحصر المثلث ABM ، الزاوية $\measuredangle ABM = 90°$ ، الزاوية المحيطية القائمة تقابل قطر الدائرة $\Leftarrow$ AM قطر

$\leftarrow$ نصف القطر $R = \frac{\sqrt{500}}{2}$

مركز الدائرة هو نقطة وسط القطر AM : $O\left(\frac{3+13}{2}, \frac{-4+16}{2}\right) \leftarrow O(8,6)$

$\Leftarrow$ معادلة الدائرة $(x-8)^2+(y-6)^2 = 125$

ب3. نعوّض $C(10,-5)$ بمعادلة الدائرة:

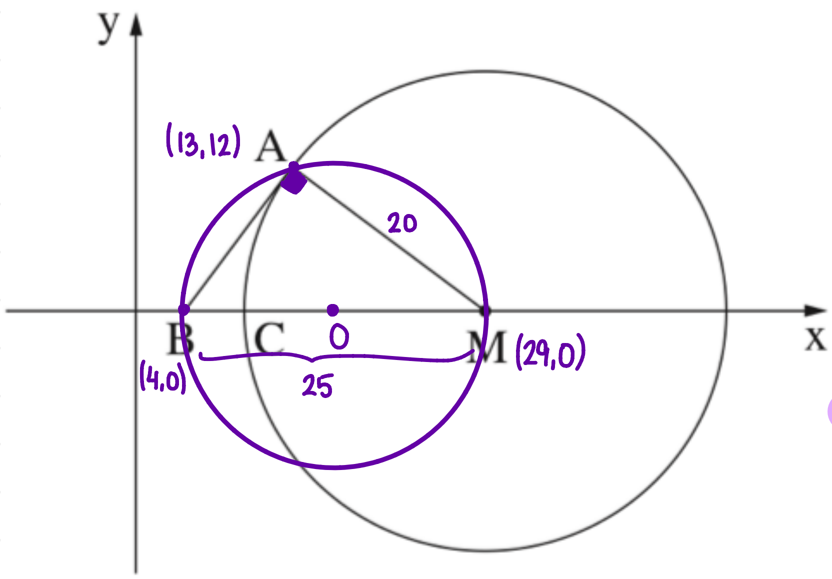
$(10-8)^2+(-5-6)^2 \overset{?}{=} 125$

$2^2+(-11)^2 \overset{?}{=} 125$

$125 \overset{\checkmark}{=} 125$

نعم النقطة C تقع على محيط الدائرة بالبند ب2

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ موعد ب - سؤال ٢



2. الرسم الذي أمامك يصف دائرة.

معطى أنّ: نصف قطر الدائرة هو 20.

مركز الدائرة، M ، يقع على الجزء الموجب للمحور x .

النقطة $A(13,12)$ تقع على محيط الدائرة.

أ. جد إحداثيّات النقطة M .

مرّروا عبر النقطة A مماسًّا للدائرة، يقطع المحور x في النقطة B .

ب. جد إحداثيّات النقطة B .

جـ. جد معادلة الدائرة التي تحصر المثلّث BAM .

C هي نقطة تقاطع الدائرة المعطاة مع المحور x ، كما هو موصوف في الرسم.

د. (1) جد الإحداثيّ x للنقطة C .

(2) جد لأيّة قيَم k يقطع المستقيم $x = k$ الدائرتين (ولا يمسّ أيًّا منهما).

أ. نفرض انّ الاحداثيات M هي: $M(x,0)$. حسب قانون الطول:

$AM=\sqrt{(13-x)^2+(12-0)^2}=20 \quad |^2$

$169-26x+x^2+144=400$

$x^2-26x-87=0 \rightarrow x=\frac{26\pm\sqrt{26^2-4\cdot1\cdot(-87)}}{2}=\frac{26\pm32}{2} \quad x_1=-3 \quad x_2=29 \rightarrow M(29,0)$

ب. الخط النازل من مركز الدائرة للماس يعامدها بنقطة التماس. $MA\perp AB \rightarrow m_{MA}\cdot m_{AB}=-1 \Leftarrow -\frac{3}{4}\cdot m_{AB}=-1$

$m_{MA}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{12-0}{13-29}=\frac{12}{-16}=-\frac{3}{4}$

$m_{AB}=\frac{4}{3}$

$A(13,12) \quad B(x,0) \Rightarrow m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{12-0}{13-x}=\frac{4}{3} \rightarrow 36=52-4x$

نفرض ان الاحداثي x للنقطة B هو x

$4x=16$

$x=4 \quad B(4,0)$

ج. $\measuredangle BAM$ هي زاوية محيطية قائمة ⇐ BM قطر الدائرة. $BM=29-4=25 \rightarrow BO=\frac{1}{2}BM=12.5$

O مركز الدائرة. $O\left(\frac{4+29}{2},0\right)=O(16.5,0)$

معادلة الدائرة: $(x-16.5)^2+y^2=156.25$

د1. $MC=20$ نصف قطر الدائرة الكبيرة ⇐ $x_C=x_M-20=29-20=9 \rightarrow C(9,0)$

د2. الدائرتين تتقاطع بنقطتين A و R .

∗ الدائرة الكبيرة $(x-29)^2+y^2=400$

∗ الدائرة الصغيرة $(x-16.5)^2+y^2=156.25 \quad -$

$(x-29)^2-(x-16.5)^2=243.5$

$x^2-58x+841-(x^2-33x+272.25)=243.5$

$-25x=-325$

$x=13$ I

$(13-29)^2+y^2=400$

$y^2=144$

$y=\pm12$

$12\geq k\geq-12$