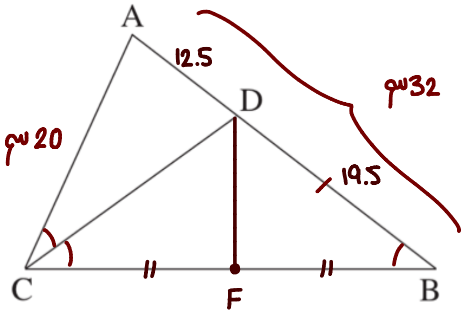
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٤

٤. CD هو منصّف الزاوية ACB في المثلث ABC

(انظر الرسم).



معطى أنّ: $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle ABC$

$AC = 20$ سم

$AB = 32$ سم

أ. (١) برهن أنّ $\triangle ACB \sim \triangle ADC$.

(٢) جد طول القطعة AD.

(٣) جد طول الضلع BC.

ب. النقطة F هي منتصف الضلع BC.

برهن أنّ: $DF \perp BC$.

أ1. $\triangle ACB \sim \triangle ADC$ حسب ز.ز

ز. $\sphericalangle A$ زاوية مشتركه

ز. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC$ (من المعطى)

وهو المطلوب

أ2. نسب التشابه من البند السابق: $\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{DC} = \frac{AC}{AD}$ نفرض $AD = x$

$\frac{32}{20} = \frac{20}{x} \leftarrow 32 \cdot x = 400 \leftarrow AD = x = 12.5$ سم

وهو المطلوب

أ3. من البند السابق: $DB = 19.5$ سم

معطى DC منصّف الزاوية $\sphericalangle C$ بالمثلث $\triangle ACB$: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} \leftarrow \frac{12.5}{19.5} = \frac{20}{CB}$

$\leftarrow CB = 31.2$ سم

وهو المطلوب

ب. $\triangle CDB$ مثلث به زاويتين متساويتين $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBC$ لذلك هو مثلث متساوي الساقين.

بمثلث متساوي الساقين الارتفاع للقاعدة والمتوسّط للقاعدة ومنصّف زاوية الرأس هو نفس الضلع.

DF متوسط $\Leftarrow$ DF ارتفاع $\Leftarrow$ $DF \perp BC$

وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٥

٥. المثلثان CAD وَ CFD محصوران داخل دائرة.

AB هو قطر في هذه الدائرة، وهو يقطع

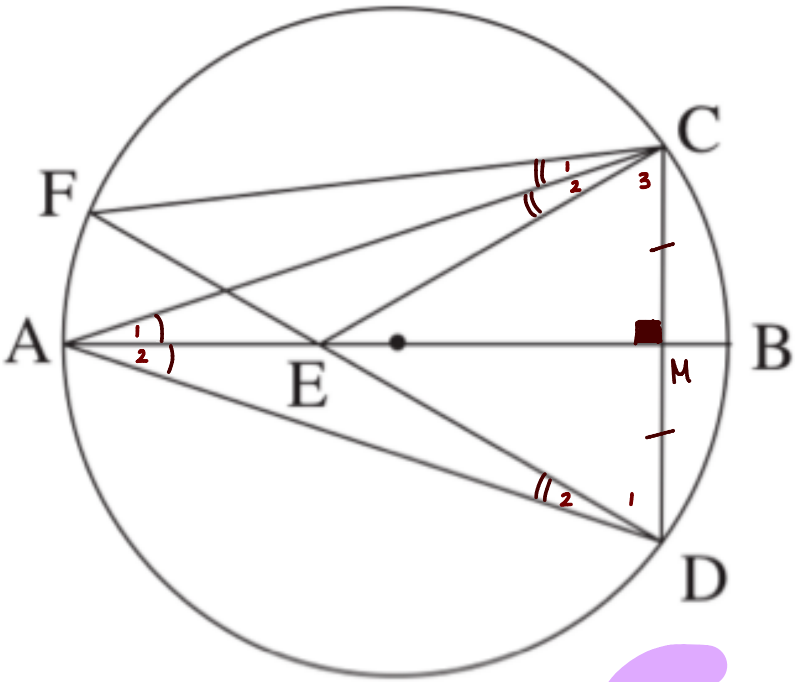
الضلع FD في النقطة E (انظر الرسم).

معطى أنّ $CD \perp AB$.

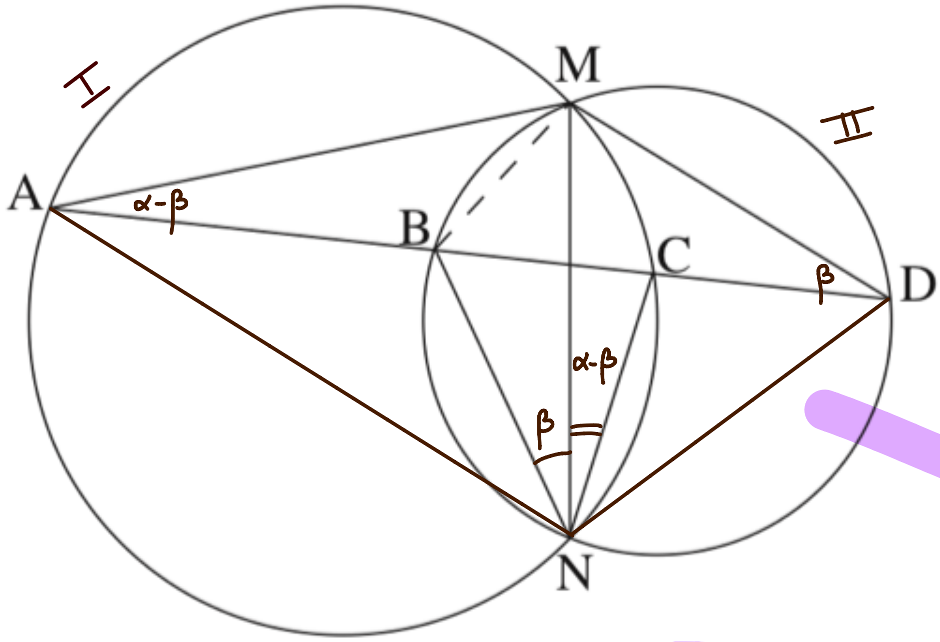
أ. برهن أنّ المثلث CAD هو متساوي الساقين.

ب. برهن أنّ $\Delta CAE \cong \Delta DAE$.

جـ. برهن أنّ $\sphericalangle ACF = \sphericalangle ACE$.



	إدعاء	شرح
أ. (1)	$CM = MD$	العامود النازل من مركز الدائرة لوتر يوسطها.
(2)	ΔCAD متساوي الساقين ($AD = AC$)	ΔACD مثلث به يتطابق المتوسط والعامود لنفس الضلع لذلك هو متساوي الساقين. وهو المطلوب
ب. (3)	$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$	بمثلث متساوي الساقين ΔCAD الارتفاع/المتوسط للقاعدة هو ايضاً منصّف زاوية الرأس. او اوتار متساويه ($CB = BD$) تقابل زوايا محيطيه متساوية ($\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$).
(4)	$\Delta CAE \cong \Delta DAE$ حسب ض.ز.ض	ض. AE ضلع مشترك ز. $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ ض. $AD = AC$ (ادعاء 2) وهو المطلوب
جـ. (5)	$\sphericalangle D_2 = \sphericalangle C_2$	من التطابق بادعاء 4
(6)	$\sphericalangle D_2 = \sphericalangle C_1$	زوايا محيطيه تقابل نفس القوس $\overset{\frown}{AF}$ هم متساويه
(7)	$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$	ادعاء 5+6 وهو المطلوب.



٥. تتقاطع دائرتان في النقطتين M وَ N .
هناك مستقيم يقطع الدائرتين في النقاط A , B , C , D ، كما هو موصوف في الرسم.
معطى أنّ: $\measuredangle BNC = \alpha$
$\measuredangle BNM = \beta$

أ. عبّر بدلالة α وَ β (حسب الحاجة):
(١) عن $\measuredangle MDB$. علّل.
(٢) عن $\measuredangle MAC$. علّل.
(٣) عن $\measuredangle AMD$.

ب. هل الشكل الرباعي AMDN هو قابل للحصر داخل دائرة؟ علّل.

أ. (1) بالدائرة II , زوايا محيطيه تقابل نفس الوتر (BM) هم متساوية ⇐ $\measuredangle BNM = \measuredangle MDB = \beta$

وهو المطلوب

(2) بالدائرة I , زوايا محيطيه تقابل نفس القوس $(\overset{\frown}{MC})$ هم متساوية ⇐ $\measuredangle MNC = \measuredangle MAC = \alpha - \beta$

وهو المطلوب

(3) ΔAMD مجموع زوايا المثلث 180° + بند أ ١ و 2 ⇐

$\measuredangle AMD = 180^\circ - \beta - (\alpha - \beta) = 180^\circ - \alpha$

وهو المطلوب

ب. AMDN قابل للحصر داخل دائرة فقط اذا تحقّق ان مجموع كل زاويتين متقابلتين 180° .

من بند أ3 $\measuredangle AMD = 180^\circ - \alpha$ ← يجب ان يكون $\measuredangle AND = \alpha$

وهذا يناقض المعطيات $\measuredangle BNC = \alpha$ (قسم من $\measuredangle AND$)

⇓

لا يمكن حصر AMDN بدائرة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٤

٤ . الشكل الرباعي ABCD محصور داخل دائرة مركزها M .

AB هو قطر في الدائرة .

AC وَ DM يلتقيان في النقطة E (انظر الرسم) .

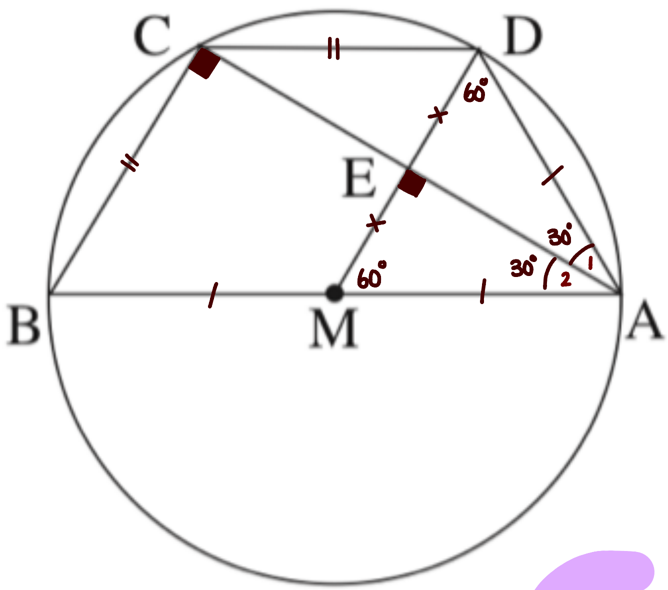
معطى أنّ: AD = AM ، CD = CB .

برهن أنّ:

أ . ME = ED .

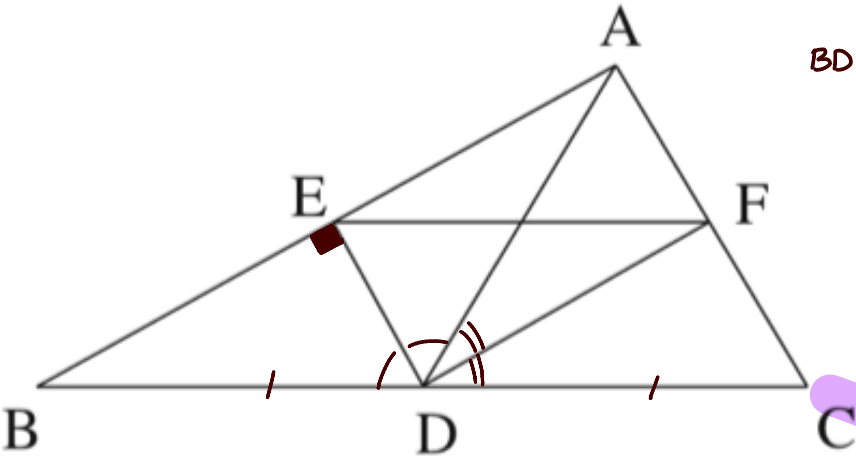
ب . CB ∥ DM .

جـ . CD ∥ BM .



		إدعاء	شرح
أ.	(1)	$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$	زوايا محيطيه المقابله لأوتار متساوية (CB=CD) هم متساوية
	(2)	$AE \perp MD$, $ME = ED$	$\triangle MDA$ متساوي الاضلاع (معطى: $MA=AD$, $MD=MA$ انصاف اقطار) AE منصّف زاويه A اذاً هو ايضاً ارتفاع للقاعدة MD وبوسطه. وهو المطلوب.
ب.	(3)	$\measuredangle BAC = 90°$	الزاوية المحيطيه المقابل لقطر الدائرة (AB) هي قائمة
	(4)	$CB \parallel DM$	$\measuredangle BCA = \measuredangle MEA = 90°$ زوايا متناظرة متساويه $\Leftarrow CB \parallel DM$ وهو المطلوب
ج.	(5)	$\measuredangle DMA = \measuredangle A = \measuredangle MDA = 60°$ $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = 30°$	بمثلث متساوي الاضلاع $\triangle MDA$, زوايا متساويه مقدارها 60°.
	(6)	$\measuredangle DCA = 30°$	شكل رباعي محصور بدائرة , مجموع كل زوج زوايا متقابله مجموعها 180° $\measuredangle C + \measuredangle A = 180°$ $\measuredangle ACD + 90° + 60° = 180°$
	(7)	$CD \parallel BM$	$\measuredangle DCA = \measuredangle A_2 = 30°$ زوايا متبادله متساويه $\Leftarrow CD \parallel BM$ وهو المطلوب.

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٥



٥. في المثلث ABC المستقيم المتوسّط للضلع BC هو AD ، $BD=DC$

DE هو منصّف الزاوية $\measuredangle ADB$ ،

DF هو منصّف الزاوية $\measuredangle ADC$ (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ:

(١) $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$.

(٢) $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$.

(٣) $\measuredangle AEF=\measuredangle ABC$.

ب. معطى أيضًا أنّ $\measuredangle BED=90^o$.

برهن أنّ:

(١) $AE=BE$.

(٢) $ED=\frac{1}{2}AC$.

أ1. DE منصّف الزاوية $\measuredangle ADB$ اذاً ينتج النسب: $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{BD}$ ، معطى $BD=DC$ ← $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$

وهو المطلوب

أ2. DF منصّف الزاوية $\measuredangle ADC$ اذاً ينتج النسب: $\frac{AD}{DC}=\frac{AF}{FC}$

من بند أ1: $\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EB}$

$= \frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}$

وهو المطلوب

أ3. النسب من بند أ2 تحقق النظرية العكسية لطاليس ← $EF \parallel BC$

← $\measuredangle AEF=\measuredangle ABC$ زوايا متناظرة مشاوية

وهو المطلوب

ب1. طريقة 1 بالمثلث $\triangle ABD$ ، ED هو ارتفاع لضلع BA ومنصّف الزاوية التي تقابل نفس الضلع ، اذاً المثلث هو متساوي الساقين و ED يوسّط AB ← $BE=EA$

طريقة 2 $\triangle BED \cong \triangle AED$ حسب ز.ض.ز ز. $\measuredangle BED=\measuredangle AED=90^\circ$

ض. ED ضلع مشترك

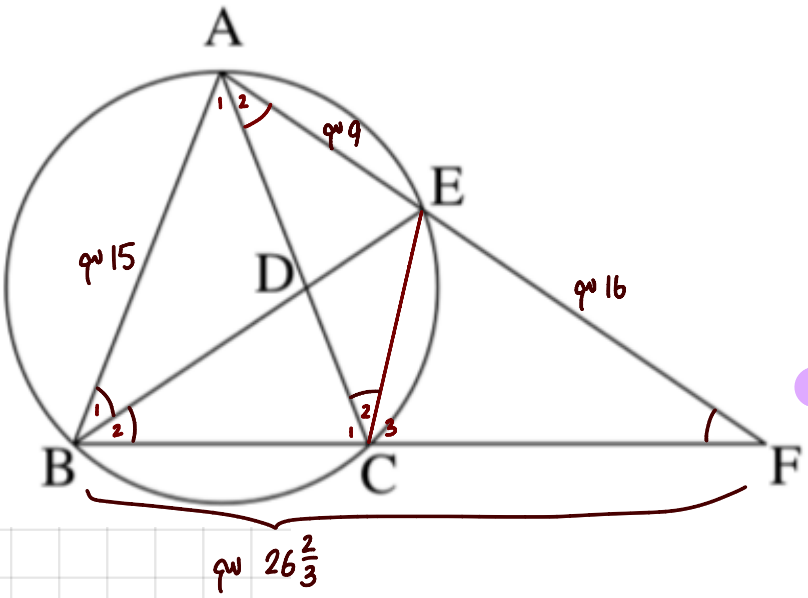
ز. $\measuredangle BDE=\measuredangle ADE$ (معطى)

وهو المطلوب

ب2. ED هي قطعة بالمثلث التي تنصّف ضلعين ($BD=DC$ معطى ، $BE=EA$ بند ب1) اذاً هي قطعة متوسطة.

القطعة المتوسطة تنصّف ضلعين وتوازي الثالث وتساوي نصفه ← $ED=\frac{1}{2}AC$

وهو المطلوب



٤. المثلث ABC محصور داخل دائرة.

الوتر BE يقطع الضلع AC في النقطة D.

امتدادا الوترين AE وَ BC يلتقيان في النقطة F،

كما هو موصوف في الرسم.

معطى أنّ: $\measuredangle ABE = \measuredangle EBC = \measuredangle AFB$

$EF = 16$ سم

$AF = 25$ سم

أ. (١) برهن أنّ $\Delta BAE \sim \Delta FAB$.

(٢) جد طول AB.

(٣) جد طول BF.

ب. برهن أنّ $\Delta AEC \sim \Delta BEF$.

جـ. جد طول CF.

أ. (1) $\Delta BAE \sim \Delta FAB$ حسب ز.ز ز. $\measuredangle A$ مشترك

ز. $\measuredangle B_1 = \measuredangle F$ من المعطى

(2) نسب التشابه من أ(1):

$$\frac{BA}{FA} = \frac{AE}{AB} = \frac{BE}{FB}$$

$$\frac{BA}{25} = \frac{9}{AB}$$

$$AB^2 = 225$$

$AB = 15$ سم

(3) BE منصّف الزاوية $\measuredangle B$ بالمثلث ΔABF:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{AE}{EF}$$

$$\frac{15}{BF} = \frac{9}{16}$$

$BF = 26\frac{2}{3}$ سم

وهو المطلوب.

ب. زوايا محيطية تقابل نفس الوتر AE هم متساوية $\measuredangle B_1 = \measuredangle C_2$

" " " " EC " . $\measuredangle B_2 = \measuredangle A_2$

$\Delta AEC \sim \Delta BEF$ حسب ز.ز $(\measuredangle A_2 = \measuredangle C_2 = \measuredangle B_2 = \measuredangle F)$

وهو المطلوب.

جـ. نسب التشابه بالبند ب:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{EF} = \frac{AC}{BF}$$

ΔAEC مثلث به زاويتين متساويتين لذلك هو متساوي الساقين $AE = EC = 9$ سم

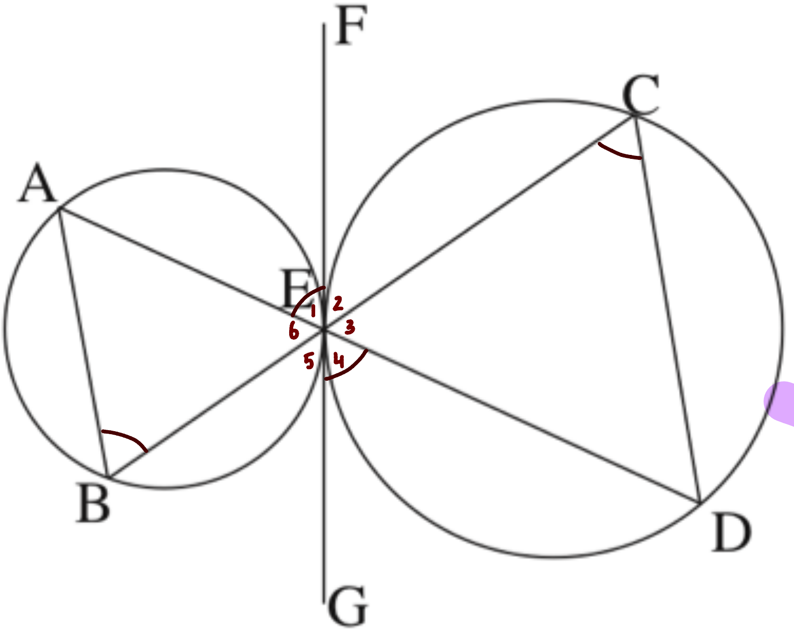
$$\frac{9}{16} = \frac{AC}{26\frac{2}{3}}$$

$AC = 15$ سم

ΔACF مثلث به زاويتين متساويين لذلك هو متساوي الساقين $AC = CF = 15$ سم

وهو المطلوب.

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ - سؤال ٤



٤. يوجد لدائرتين مماس مشترك FG ،
يمسّ كلتيهما في النقطة E .
النقطتان C وَ D موجودتان على محيط
إحدى الدائرتين، والنقطتان A وَ B موجودتان
على محيط الدائرة الأخرى بحيث تلتقي
القطعتان AD وَ CB في النقطة E
(انظر الرسم).

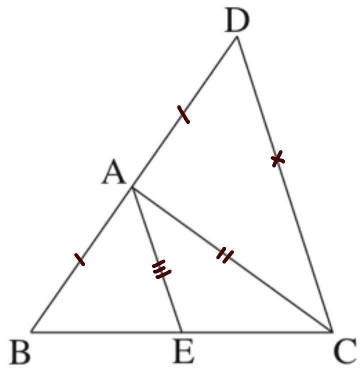
أ. برهن أنّ $\sphericalangle GED = \sphericalangle ABE$.

ب. برهن أنّ $\frac{BE}{CE} = \frac{AE}{DE}$.

جـ. علّل لماذا طول الارتفاع على الضلع CD في المثلث BCD يساوي طول الارتفاع على الضلع CD في المثلث ACD .

		إدعاء	شرح
أ.	(1)	$\sphericalangle E_1 = \sphericalangle B$	الزاوية المحصورة بين مماس FG ووتر AE يساوي الزاوية المحيطية المقابلة للوتر.
	(2)	$\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_4$	زوايا متقابلة بالرأس متساوية
	(3)	$\sphericalangle B = \sphericalangle E_4$	من ادعاء 1+2 وهو المطلوب
ب.	(4)	$\sphericalangle E_4 = \sphericalangle C$	الزاوية المحصورة بين مماس FG ووتر ED يساوي الزاوية المحيطية المقابلة للوتر.
	(5)	$\triangle AEB \sim \triangle DEC$ حسب ز.ز	ز. $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ ادعاء 1+2+4 ز. $\sphericalangle E_3 = \sphericalangle E_6$ زوايا متقابلة بالرأس متساوية
	(6)	$\frac{AE}{DE} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC}$	نسب التشابه بادعاء 5 وهو المطلوب
ج.	(7)	$AB \parallel CD$	$\sphericalangle B = \sphericalangle C$ زوايا متبادلة متساوية
	(8)	ارتفاع$\triangle BCD$ = ارتفاع$\triangle ACD$	البعد بين خطين متوازيين ثابت. وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ موعد ب - سؤال ٤



٤ . AE هو مستقيم متوسّط للضلع BC في المثلث ABC .

A'E' هو مستقيم متوسّط للضلع B'C' في المثلث A'B'C' .

معطى أنّ : BA = B'A'

AC = A'C'

AE = A'E'

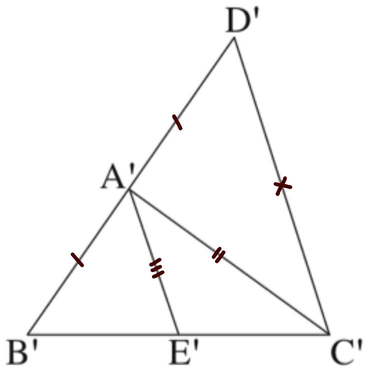
مدّوا الضلع BA حتّى D بحيث BA = AD ،

ومدّوا الضلع B'A' حتّى D' بحيث B'A' = A'D' .

أ. علّل لماذا AE ∥ DC .

ب. برهن أنّ ΔADC ≅ ΔA'D'C' .

جـ. برهن أنّ ΔABC ≅ ΔA'B'C' .



أ. AE قطعة بالمثلث ΔBDC التي تنصّف ضلعين بالمثلث (BE = EC , AB = DA) اذا هي قطعه متوسطه.
القطعة المتوسطه تنصّف ضلعين بالمثلث وتوازي الضلع الثالث وتساوي نصفه.

$AE \parallel DC ,\ AE = \frac{1}{2} DC$ وهو المطلوب

ب. A'E' قطعة بالمثلث ΔB'D'C' التي تنصّف ضلعين بالمثلث (B'E' = E'C' , A'B' = D'A') اذا هي قطعه متوسطه.
القطعة المتوسطه تنصّف ضلعين بالمثلث وتوازي الضلع الثالث وتساوي نصفه.

$A'E' \parallel D'C' ,\ A'E' = \frac{1}{2} D'C'$

ΔADC ≅ ΔA'D'C' حسب ض.ض.ض : ض. AD = A'D' من المعطيات

ض. AC = A'C' معطى

ض. DC = D'C' (AE = A'E' معطى + بنود السابقه)

وهو المطلوب

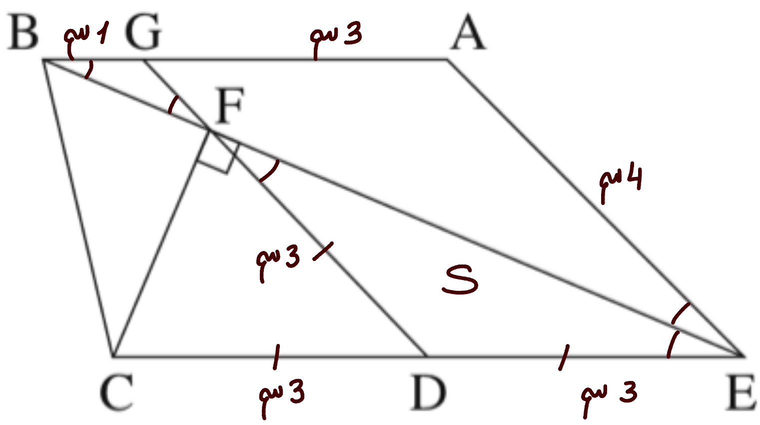
جـ. ΔABC ≅ ΔA'B'C' حسب ض.ز.ض : ض. AC = A'C' معطى

ز. ∢BAC = ∢B'A'C' (من التطابق بالبند ب ينتج ان ∢DAC = ∢D'A'C' + زوايا مكمّله لـ 180°)

ض. AB = A'B'

وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٢ - سؤال ٤



٤. في شبه المنحرف ABCE ‏(CE∥BA)، F هي نقطة على القطر BE بحيث $CF \perp BE$.
D هي نقطة على CE بحيث CD = ED
(انظر الرسم).
امتداد FD يقطع AB في النقطة G .
معطى أنّ: EA = 4 سم ، ED = 3 سم ،
EB ينصّف الزاوية AEC .

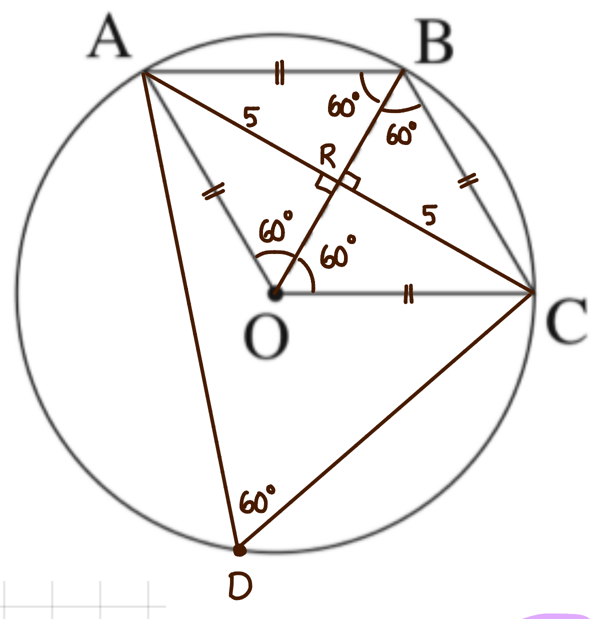
أ. برهن أنّ $\Delta EDF \sim \Delta BAE$.

ب. برهن أنّ الشكل الرباعي AGDE هو متوازي أضلاع.

جـ. مساحة المثلث EDF هي S .
عبّر بدلالة S عن مساحة المثلث BGF . علّل.

	إدعاء	شرح
أ. (1)	$FD = DE = CD$	بمثلث قائم الزاوية ΔCFE المتوسط للوتر $(CD=DE)$ يساوي نصفه
(2)	$\measuredangle DFE = \measuredangle FED$	من ادعاء 1 ينتج انّ ΔDFE متساوي الساقين اذاً زوايا القاعدة متساوية
(3)	$\measuredangle ABE = \measuredangle BEC$	زوايا متبادلة متساوية من التوازي $CE \parallel BA$
(4)	$\Delta EDF \sim \Delta BAE$ حسب ز.ز	معطى انّ EB ينصّف الزاوية $\measuredangle AEC$ + ادعاء 3,2 $\measuredangle ABE = \measuredangle AEB = \measuredangle BEC = \measuredangle DFE$ وهو المطلوب
ب. (5)	$GD \parallel AE$	$\measuredangle AEF = \measuredangle EFD$ زوايا متبادله متساوية
(6)	AGDE متوازي اضلاع	AGDE شكل رباعي فيه كل زوج اضلاع متقابله متوازية اذاً هو متوازي اضلاع (معطى + ادعاء 5) وهو المطلوب
ج. (7)	$AB = AE = 4$ سم	ΔABE مثلث به زاويتين متساويتين $(\measuredangle ABE = \measuredangle AEB)$ هو متساوي الساقين
(8)	$AG = DE = 3$ سم	AGDE متوازي اضلاع لذلك كل زوج اضلاع متقابله متساوية
(9)	$\Delta BGF \sim \Delta FDE$ حسب ز.ز	ز. $\measuredangle GFB = \measuredangle DFE$ ز. $\measuredangle GBF = \measuredangle FED$
(10)	$S_{\Delta BGF} = \frac{1}{9}S$	النسبه بين اضلاعهم: $\frac{BG}{DE} = \frac{1}{3}$ اذاً النسبه بين مساحتهم هو مربّع النسبه بين اضلاعهم وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٢ - سؤال ٥



٥. A و B و C هي نقاط على محيط دائرة مركزها O
(انظر الرسم).

معطى أنّ: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COB$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC$

أ. (١) برهن أنّ $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CBO$.

(٢) برهن أنّ الشكل الرباعي AOCB هو معين.

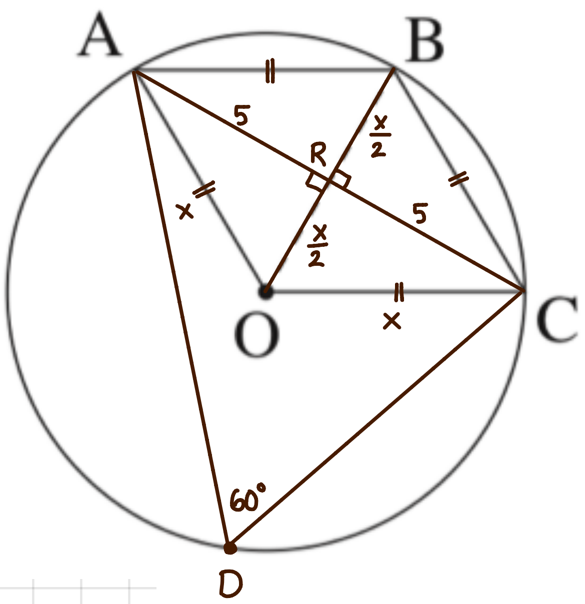
D هي نقطة على القوس الكبير $\overset{\frown}{AC}$.

ب. احسب مقدار الزاوية ADC .

ج. معطى أيضًا أنّ $AC = 10$ سم .

احسب مساحة المثلث AOC .

	إدعاء	شرح
أ1. (1)	$AB = BC$	زوايا مركزية متساوية $(\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC)$ تقابل اوتار متساوية
(2)	$\triangle ABO \cong \triangle BCO$ حسب ض.ض.ض	ض. $AO = OC$ (انصاف اقطار) ض. $AB = BC$ (ادعاء ١) ض. BO مشترك
(3)	$\sphericalangle ABO = \sphericalangle CBO$	من ادعاء 2 وهو المطلوب
أ2. (4)	$\triangle ABO$ متساوي الاضلاع $(AO = AB = OB)$	من ادعاء 3 والمعطى $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC$
(5)	AOCB معين	شكل رباعي كل اضلاعه متساوية هو معين (ادعاء 2 + 4) وهو المطلوب
ب. (6)	$\sphericalangle AOC = 120°$	$\triangle ABO$ و $\triangle OBC$ متساوي الاضلاع لذلك زواياهم $60°$
(7)	$\sphericalangle ADC = 60°$	الزاوية المحيطية تساوي نصف الزاوية المركزية التي تقابل نفس القوس $\overset{\frown}{AC}$ وهو المطلوب
ج. (8)	$AC \perp BR$, $AR = RC = 5$ سم	ABCO معين, لذلك اقطاره تنصّف بعضها البعض وتعامد بعضها البعض
(9)	$OR = 2.886$ سم	$\triangle ORC$ $\tan 60° = \frac{5}{OR} \leftarrow OR = \frac{5}{\tan 60°}$
(10)	$S_{\triangle AOC} = 14.43$ سم²	$S_{\triangle AOC} = \frac{AC \cdot OR}{2} = \frac{10 \cdot 2.886}{2}$



٥. A وَ B وَ C هي نقاط على محيط دائرة مركزها O (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COB$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC$

أ. (١) برهن أنّ $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CBO$.

(٢) برهن أنّ الشكل الرباعي AOCB هو معين.

D هي نقطة على القوس الكبير $\overset{\frown}{AC}$.

ب. احسب مقدار الزاوية ADC .

جـ. معطى أيضًا أنّ AC = 10 سم .

احسب مساحة المثلث AOC .

طريقة ثانية لايجاد OR : * نفرض ان نصف قطر الدائرة x سم

$\Leftarrow \quad OR = \frac{x}{2} \qquad OC = x$

* $\triangle ORC$ فيثاغورس :
$OR^2 + RC^2 = OC^2$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5^2 = x^2$

$0.25x^2 + 25 = x^2$

$25 = 0.75x^2 \quad / : 0.75$

$33\frac{1}{3} = x^2 \quad / \sqrt{}$

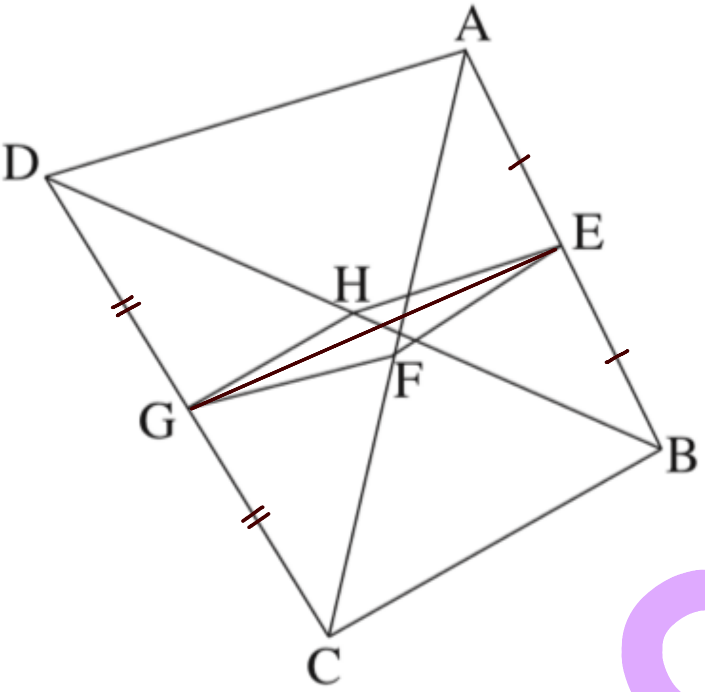
$x = 5.77$ سم

$\Rightarrow \quad OR = 2.88$ سم

* $S_{\triangle AOC} = \frac{OR \cdot AC}{2} = \frac{2.88 \cdot 10}{2} = 14.4$ سم²

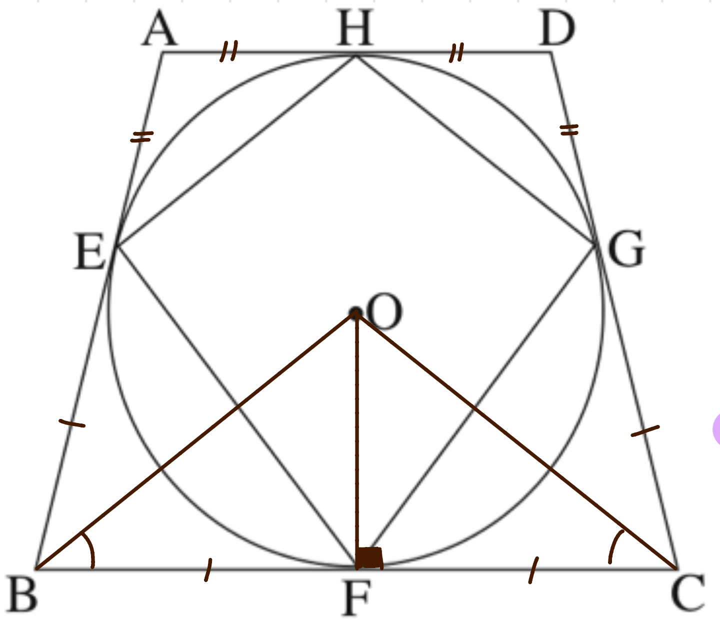
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٤

4. في الشكل الرباعي ABCD، النقطة E هي منتصف الضلع AB ،
والنقطة G هي منتصف الضلع DC .
النقطة F هي منتصف القطر AC ،
والنقطة H هي منتصف القطر DB (انظر الرسم).
برهن أنّ :
أ. $EF \parallel HG$.
ب. $\Delta EHG \cong \Delta EFG$.



		إدعاء	شرح
أ.	(1)	GH قطعة متوسطه بالمثلث ΔDBC	$DH=HB$ $DG=GC$ قطعة بمثلث تنصّف ضلعين بالمثلث هي قطعة متوسطة
	(2)	$GH \parallel CB$	القطعة المتوسطه تنصّف ضلعين وتوازي الضلع الثالث
	(3)	FE قطعة متوسطة بالمثلث ΔACB	$AE=EB$ $AF=FC$ قطعة بمثلث تنصّف ضلعين بالمثلث هي قطعة متوسطة
	(4)	$FE \parallel CB$	القطعة المتوسطه تنصّف ضلعين وتوازي الضلع الثالث
	(5)	$GH \parallel FE$	من ادعاء 2 + 4 وهو المطلوب
ب.	(6)	$GH = FE = \frac{1}{2}CB$	القطعة المتوسطه بالمثلث (GH بالمثلث ΔDCB , FE بالمثلث ΔACB) تنصّف ضلعين وتوازي الثالث وتساوي نصفه
	(7)	GHEF متوازي اضلاع	GHEF شكل رباعي به زوج اضلاع متقابله متوازية ومتساوية هو متوازي الاضلاع (ادعاء 5 + 6)
	(8)	$\Delta EHG \cong \Delta EFG$ حسب ض.ض.ض	ض. $GH=FE$ (ادعاء 6) ض. GE مشترك ض. $HE=GF$ (GHEF متوازي الاضلاع لذلك كل زوج اضلاع متقابله متساوية) وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٥



5. معطى شبه المنحرف المتساوي الساقين ABCD ($AD \parallel BC$).

$AB=DC$

أضلاع شبه المنحرف تمسّ دائرة مركزها O في النقاط E وَ F وَ G وَ H (انظر الرسم).

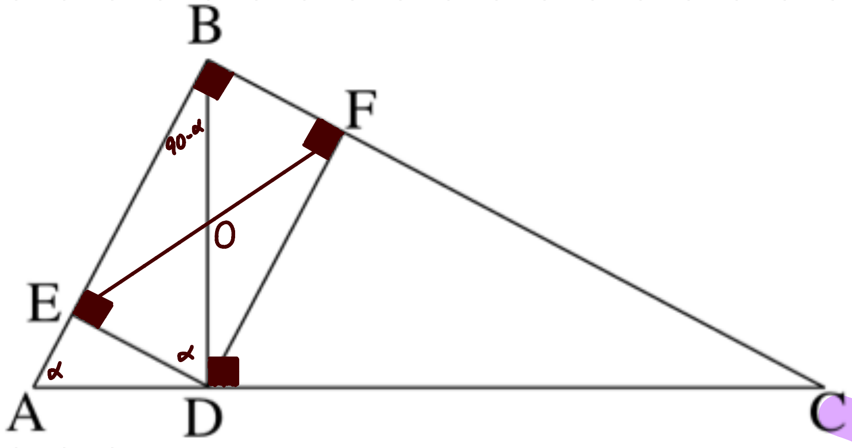
برهن أنّ:

أ. $\Delta BOF \cong \Delta COF$.

ب. الشكل الرباعي EHGF هو دالتون.

	إدعاء	شرح
أ. (1)	$OF \perp BC$	الخط النازل من مركز الدائرة للمماس OF يعامدها في نقطة التماس
(2)	$\measuredangle B=\measuredangle C$, $\measuredangle A=\measuredangle D$	في شبه منحرف متساوي الساقين ABCD, الزوايا على كل قاعدة متساوية
(3)	$\measuredangle ABO=\measuredangle OBC$ $\measuredangle OCF=\measuredangle DCO$	القطعة الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة التي يخرج منها مماسان للدائرة, تنصف الزاوية بين المماسين.
(4)	$\Delta BOF \sim \Delta COF$ حسب ز.ز	ز. $\measuredangle OFB=\measuredangle OFC=90^\circ$ (ادعاء 1) ز. $\measuredangle OBF=\measuredangle OCF$ (ادعاء 3+2)
(5)	$\Delta BOF \cong \Delta COF$ حسب ز.ض.ز	المثلثان متشابهان و OF ضلع مشترك وهو المطلوب
ب. (6)	$EB=BF=FC=GC$ $AE=AH=HD=DG$	المماسات الخارجات من نفس النقطة خارج الدائرة, متساويان + معطى $AB=DC$, $BF=FC$ من ادعاء 5
(7)	$\Delta AEH \cong \Delta DHG$ حسب ض.ز.ض	ض. $AE=DG$ (ادعاء 6) ز. $\measuredangle A=\measuredangle D$ (ادعاء 2) ض. $AH=HG$ (ادعاء 6)
(8)	$\Delta EBF \cong \Delta GCF$ حسب ض.ز.ض	ض. $EB=GC$ (ادعاء 6) ز. $\measuredangle B=\measuredangle C$ (ادعاء 2) ض. $BF=FC$ (ادعاء 6)
(9)	EHGF دالتون	هو شكل رباعي به زوج أضلاع متجاورة متساوية والضلعان الآخران أيضًا متساويان $EF=FG$ من ادعاء 8 $EH=HG$ من ادعاء 7 وهو المطلوب

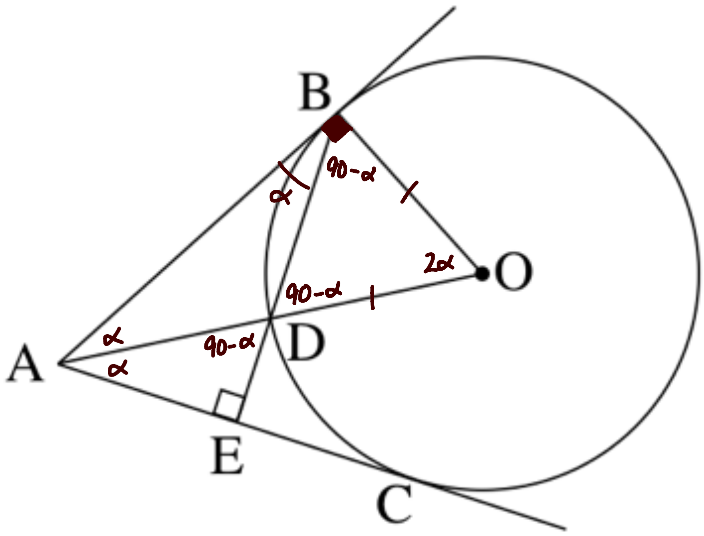
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٤



4. معطى مثلث قائم الزاوية $(\measuredangle ABC = 90^{o})$.
BD هو ارتفاع المثلث على الوتر AC .
F هي نقطة على BC بحيث $DF \perp BC$
E هي نقطة على BA بحيث $DE \perp BA$
(انظر الرسم) .
أ. برهن أنّ EF وَ BD متساويان وينصّف أحدهما الآخر.
ب. برهن أنّ $ED^2 = DF \cdot AE$.

	إدعاء	شرح
أ. (1)	BFDE مستطيل	شكل رباعي به 3 زوايا قائمة هو مستطيل
(2)	$BO = FO = DO = EO$	BFDE مستطيل، لذلك اقطاره متساوية وتنصّف بعضها البعض وهو المطلوب
ب. (3)	$\measuredangle ABD = 90-\alpha^{\circ}$	نفرض: $\measuredangle A = \alpha$ $\triangle ABD$ مجموع زوايا المثلث 180°
(4)	$\measuredangle BDE = \alpha^{\circ}$	$\triangle EBD$ مجموع زوايا المثلث 180°
(5)	$\triangle AED \sim \triangle DEB$ حسب ز.ز	ز. $\measuredangle A = \measuredangle BDE = \alpha^{\circ}$ (ادعاء 3+ 4) ز. $\measuredangle AED = \measuredangle BED = 90^{\circ}$
(6)	$ED^2 = AE \cdot EB$	نسب التشابه بإدعاء 5: $\frac{AE}{DE} = \frac{ED}{EB} = \frac{AD}{DB}$
(7)	$EB = DF$	في المستطيل BFDE كل زوج اضلاع متقابله متساوية
(8)	$ED^2 = DF \cdot AE$	من ادعاء 6 + 7 وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٣ - سؤال ٤



4. يخرج من النقطة A مستقيم يمسّ في النقطة B دائرة مركزها O.
القطعة AO تقطع الدائرة في النقطة D
(انظر الرسم).

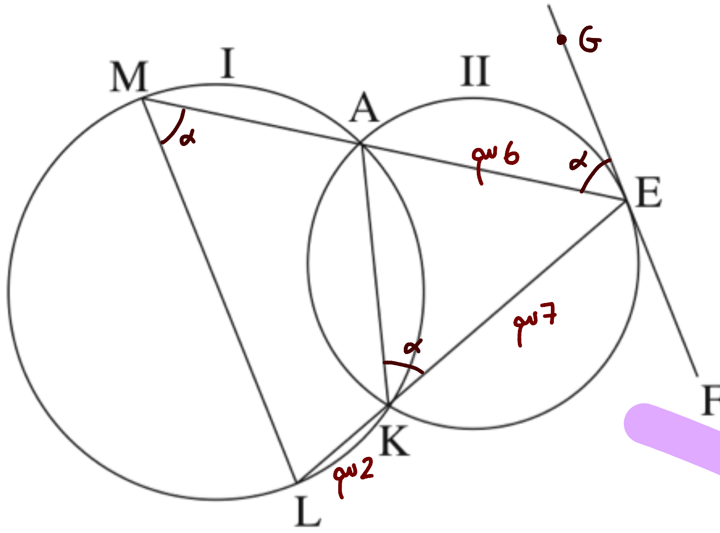
أ. برهن أنّ $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$.

يخرج من النقطة A مستقيم آخر يمسّ الدائرة في النقطة C .
امتداد الوتر BD يقطع AC في النقطة E (انظر الرسم).
معطى أنّ $BE \perp AC$.

ب. (1) برهن أنّ $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DAE$.
(2) برهن أنّ $BD = AD$.

إدعاء	شرح
أ. (1) $OB \perp BA$	الخط النازل من مركز الدائرة للمماس (AB) يعامدها في نقطة التماس
(2) $\sphericalangle EBO = 90-\alpha^\circ$	نفرض: $\sphericalangle ABE = \alpha^\circ$ + المكمل لزاوية 90° (ادعاء 1)
(3) $\sphericalangle OBD = \sphericalangle BDO = 90-\alpha^\circ$	ΔBDO مثلث متساوي الساقين ($DO = BO$ انصاف اقطار) لذلك زوايا القاعدة متساوية
(4) $\sphericalangle BOD = 2\alpha$ $\sphericalangle BOD = 2\sphericalangle ABD$	ΔBDO مجموع زوايا المثلث 180° — وهو المطلوب
ب.1 (5) $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDO = 90-\alpha^\circ$	زوايا متقابله بالرأس متساوية
(6) $\sphericalangle DAE = \alpha^\circ$ $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DAE$	ΔADE مجموع زوايا المثلث 180° — وهو المطلوب
ب.2 (7) $\sphericalangle BAO = \sphericalangle OAC = \alpha$	القطعة الواصله بين مركز الدائرة والنقطة التي تخرج منها مماسات للدائرة، تنصّف الزاوية بين المماسين
(8) ΔBAD متساوي الساقين $(BD = DA)$	ΔBAD مثلث به زاويتين متساويين هو مثلث متساوي الساقين — وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٤



4. الشكل الرباعيّ AKLM محصور داخل الدائرة I .
عبر الرأسين A وَ K مرّروا الدائرة II .
امتدادا الضلعين MA وَ LK يلتقيان في النقطة E
التي على محيط الدائرة II.
المستقيم FE يمسّ الدائرة II في النقطة E
(انظر الرسم).

أ. برهن أنّ المستقيم FE يوازي الوتر LM .

ب. برهن أنّ $\Delta AEK \sim \Delta LEM$.

جـ. معطى أنّ : AE = 6 سم ، KE = 7 سم ، KL = 2 سم .

(1) احسب النسبة بين مساحة المثلّث AEK ومساحة المثلّث LEM .

(2) احسب النسبة بين مساحة المثلّث AEK ومساحة الشكل الرباعيّ AKLM .

إدعاء	شرح
أ. (1) $\angle AEG = \angle EKA = \alpha$	الزاوية المحصورة بين مماس ووتر يساوي الزاوية المحيطية المقابلة للوتر
(2) $\angle AKL = 180 - \alpha°$	المكمّل ل- $180°$ + ادعاء 1
(3) $\angle AML = \alpha$	AKLM تشكل رباعي محصور داخل دائرة اذاً كل زوج زوايا متقابلة مجموعها $180°$ ← $\angle AML + \angle AKL = 180°$
(4) $LM \parallel FE$	$\angle LMA = \angle GEM = \alpha$ وهو المطلوب
ب. (5) $\Delta AEK \sim \Delta LEM$ حسب ز.ز	ز. $\angle MEL = \angle AEK$ ز. $\angle LMA = \angle GEM = \alpha$ وهو المطلوب
ج1. (6) $\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta LEM}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	نسب التشابه من ادعاء 5 : $\frac{AK}{LM} = \frac{EK}{EM} = \frac{AE}{LE} = \frac{6}{7+2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ النسبة بين مساحة مثلثين متشابهين هو تربيع النسبة بين اضلاعهم وهو المطلوب
ج2. (7) $\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{AKLM}} = \frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta AEK}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4}{5}$	من ادعاء 6: $\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta LEM}} = \frac{4}{9} \rightarrow S_{\Delta LEM} = \frac{9}{4} S_{\Delta AEK}$ $S_{AKLM} = S_{\Delta LEM} - S_{\Delta AEK} = \frac{9}{4} S_{\Delta AEK} - S_{\Delta AEK}$ $= S_{\Delta AEK}\left(\frac{9}{4} - 1\right) = S_{\Delta AEK} \cdot \frac{5}{4}$ وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ موعد ب - سؤال ٤

4. في المعيَّن ABCD، مقدار الزاوية الحادّة هو 60^o .

النقطة M تقع على الضلع AB،

والنقطة N تقع على الضلع BC

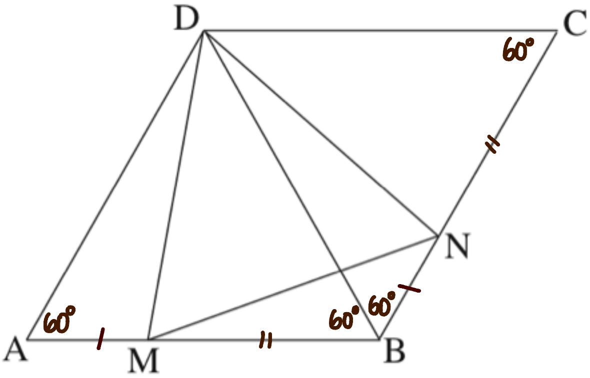
بحيث $AM = BN$ (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ $\Delta MDB \cong \Delta NDC$.

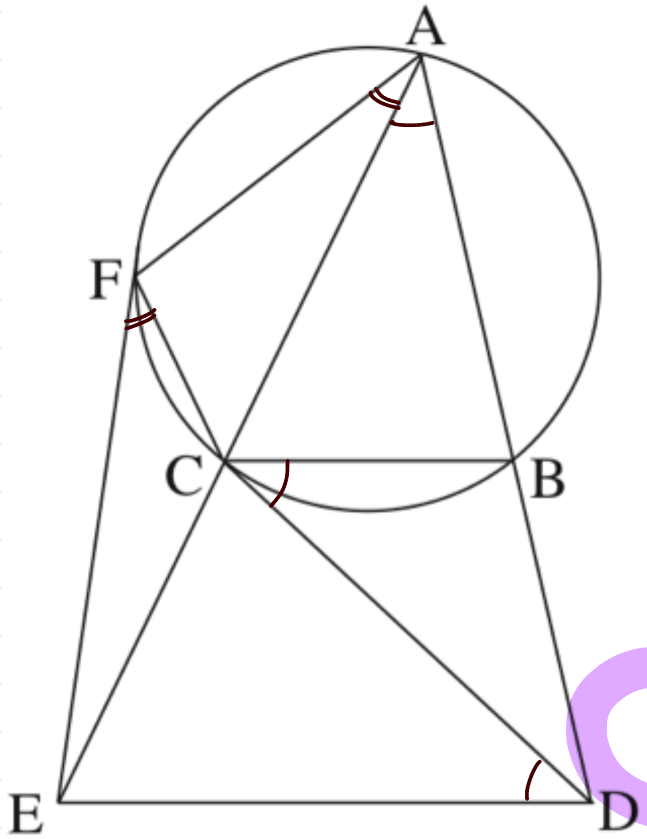
ب. برهن أنّ $\Delta ADM \cong \Delta BDN$.

جـ. مساحة الشكل الرباعيّ DMBN هي S .

عبّر بدلالة S عن مساحة المعيَّن ABCD .



	إدعاء	شرح
أ. (1)	$\measuredangle A = \measuredangle C = 60°$ $\measuredangle B = \measuredangle D = 120°$	ABCD معين لذلك كل زوج زوايا متقابله متساويه وكل زوج زوايا متجاوره مجموعها 180°
(2)	$\measuredangle DBC = \measuredangle DBA = \measuredangle BDC = \measuredangle ADB = 60°$	اقطار المعين تنصّف زوايا الشكل + ادعاء 1
(3)	ΔDBA و ΔDBC مثلثات متساوي الاضلاع $AD = DB = AB = DC = CB$	كل مثلث به زاويتين مقدارهم 60° . لان مجموع زوايا المثلث 180°, نستنج انّ بالمثلثين كل زوايا هم متساويه اذاً هم متساوي الاضلاع
(4)	$\Delta MDB \cong \Delta NDC$ حسب ض.ز.ض	ض. $MB = NC$ (ادعاء 3+ معطى) ز. $\measuredangle C = \measuredangle DBM = 60°$ (ادعاء 1+2) ض. $DB = DC$ (ادعاء 3) وهو المطلوب
ب. (5)	$\Delta ADM \cong \Delta BDN$ حسب ض.ز.ض	ض. $AD = DB$ (ادعاء 3) ز. $\measuredangle A = \measuredangle DBN = 60°$ (ادعاء 1+2) ض. $AM = BN$ (معطى) وهو المطلوب
ج. (6)	$S_{\Delta ADM} = S_{\Delta BDN}$ $S_{\Delta DMB} = S_{\Delta DNC}$	مثلثات متطابقه مساحتها متساوية
(7)	$S_{ABCD} = 2S$	$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta DMB} + 2 \cdot S_{\Delta DBN} = 2 \cdot S_{DMBN} = 2S$ وهو المطلوب



.5 معطى المثلّث ADE .
مرّروا عبر الرأس A دائرة تقطع الضلعين AD وَ AE في النقطتين B وَ C بالتلاؤم (انظر الرسم).
معطى أنّ: $BC \parallel DE$ ، DC يمسّ الدائرة.

أ. (1) برهن أنّ $\measuredangle EAD = \measuredangle CDE$.
(2) برهن أنّ $AE \cdot CE = DE^2$.

ب. مرّروا عبر الرأس E مستقيمًا يمسّ الدائرة في النقطة F (انظر الرسم).
برهن أنّ $\Delta ECF \sim \Delta EFA$.

جـ. استعن بالبندين السابقين وبرهن أنّ $EF = DE$.

		إدعاء	شرح
أ.1	(1)	$\measuredangle BCD = \measuredangle CDE$	زوايا متبادلة متساوية من التوازي $BC \parallel DE$
	(2)	$\measuredangle BCD = \measuredangle CAB$	الزاوية المحصورة بين هاس ووتر (CD، CB) تساوي الزاوية المحيطيه المقابله للوتر
	(3)	$\measuredangle EAD = \measuredangle CDE$	من ادعاء 1+ 2 وهو المطلوب
أ.2	(4)	$\Delta AED \sim \Delta DEC$ حسب ز.ز	ز. $\measuredangle AED = \measuredangle CED$ زاوية مشتركة ز. $\measuredangle CDE = \measuredangle CAB$ ادعاء 3
	(5)	$AE \cdot CE = DE^2$	نسب التشابه: $\frac{AE}{DE} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{DC}$ وهو المطلوب
ب.	(6)	$\measuredangle EFC = \measuredangle FAC$	الزاوية المحصورة بين هاس ووتر (EF، FC) تساوي الزاوية المحيطيه المقابله للوتر
	(7)	$\Delta ECF \sim \Delta EFA$ حسب ز.ز	ز. $\measuredangle FEA = \measuredangle FEC$ زاوية مشتركة ز. $\measuredangle EFC = \measuredangle FAC$ ادعاء 6 وهو المطلوب
ج.	(8)	$EF^2 = EA \cdot EC$	نسب التشابه بادعاء 7: $\frac{EC}{EF} = \frac{CF}{FA} = \frac{EF}{EA}$
	(9)	$EF = DE$	من ادعاء 5: $AE \cdot CE = DE^2$ من ادعاء 8: $AE \cdot CE = EF^2$ $\leftarrow DE^2 = EF^2$ وهو المطلوب

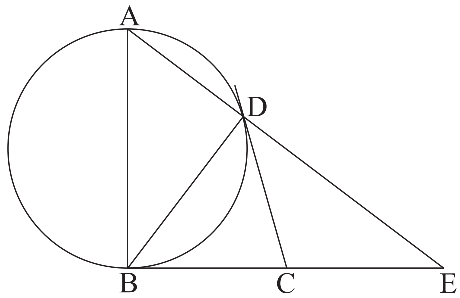
السؤال 4

CB وَ CD هما مماسّان لدائرة معيّنة.

AB هو قطر في هذه الدائرة.

امتداد AD وامتداد BC يلتقيان في النقطة E

(انظر الرسم).



أ. برهن أنّ $\sphericalangle DCB = 2 \cdot \sphericalangle E$.

ب. برهن أنّ $BD^2 = AD \cdot DE$.

جـ. برهن أنّ DC هو مستقيم متوسّط في المثلّث BDE .

إجابة السؤال 4

أ. $\sphericalangle ABE = 90^o$ مماسّ معامد لنصف القطر في نقطة التماسّ

$\Downarrow$

$\sphericalangle A = 90^o - \sphericalangle E$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o

$\sphericalangle A = \sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC$ زاوية بين مماسّ ووتر

$\Downarrow$

$\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC = 90^o - \sphericalangle E$

من هنا: $\sphericalangle DCB = 180^o - 2 \cdot (90^o - \sphericalangle E)$

$\Downarrow$

$\sphericalangle DCB = 2 \cdot \sphericalangle E$

ب. $\sphericalangle ADB = 90^o$ زاوية محيطيّة تستند إلى قطر الدائرة

$\Downarrow$

BD ارتفاع على وتر في المثلّث ABE

$\Downarrow$

$BD^2 = AD \cdot DE$ الارتفاع على الوتر في المثلّث القائم الزاوية
هو معدّل هندسيّ لمسقطَي الضلعين القائمين على الوتر

/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة إجابة السؤال 4.

جـ. في البند "أ" برهنّا أنّ: $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle E$

$\sphericalangle DCB = \sphericalangle CDE + \sphericalangle E$ الزاوية الخارجيّة للمثلّث تساوي مجموع الزاويتين في المثلّث غير المجاورتين لها

من هنا: $\sphericalangle CDE = \sphericalangle E$

$\Downarrow$

$DC = CE$ مقابل الزوايا المتساوية في المثلّث توجد أضلاع متساوية

$DC = BC$ المماسّان للدائرة اللذان يخرجان من نقطة واحدة متساويان

من هنا: $BC = CE$

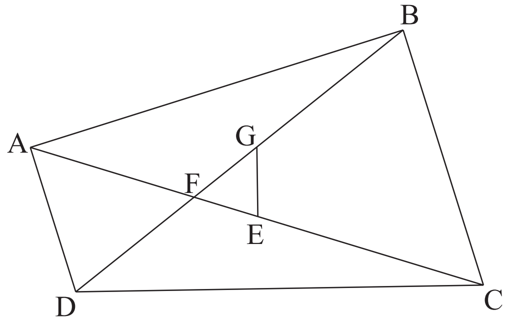
$\Downarrow$

DC هو مستقيم متوسّط في المثلّث BDE

/يتبع في صفحة 8/

السؤال 4

F هي نقطة تقاطع القطرين في الشكل الرباعيّ ABCD .
النقطة E تقع على FC ،
والنقطة G تقع على FB ، بحيث يكون
الشكل الرباعيّ BCEG قابلاً للحصر
في دائرة (انظر الرسم) .



أ. برهن أنّ: $\Delta FEG \sim \Delta FBC$.

ب. معطى أنّ: $\frac{AF}{FG} = \frac{DF}{FE}$.
برهن أنّ: $\Delta FDA \sim \Delta FEG$.

جـ. برهن أنّ: $AD \parallel BC$.

إجابة السؤال 4

أ. $\sphericalangle GEC + \sphericalangle GBC = 180^o$ مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعيّ القابل للحصر هو 180^o

$\sphericalangle GEC + \sphericalangle GEF = 180^o$ مجموع الزاويتين المتجاورتين هو 180^o

$\Downarrow$

من هنا: $\sphericalangle GEF = \sphericalangle GBC$

$\sphericalangle BFC = \sphericalangle GFE$ زاوية مشتركة للمثلّثين

$\Downarrow$

من هنا: $\triangle FEG \sim \triangle FBC$ (ز.ز.)

ب. معطى أنّ: $\frac{AF}{FG} = \frac{DF}{FE}$

$\sphericalangle AFD = \sphericalangle GFE$ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان

$\Downarrow$

$\triangle FDA \sim \triangle FEG$ (ض.ز.ض)

جـ. $\triangle FDA \sim \triangle FEG$ بُرهن في البند "ب"

$\Downarrow$

$\sphericalangle GEF = \sphericalangle ADF$ زاويتان متناظرتان في مثلّثين متشابهين

$\sphericalangle GEF = \sphericalangle GBC$ بُرهن في البند "أ"

$\Downarrow$

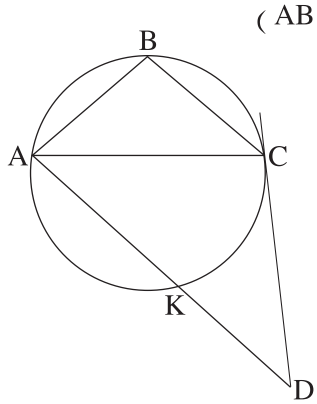
$\sphericalangle ADF = \sphericalangle GBC = \sphericalangle DBC$

$\Downarrow$

$AD \parallel BC$ إذا كانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، فإنّ المستقيمين متوازيان

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 4



المثلّث المتساوي الساقين (والمنفرج الزاوية) ABC ($AB = BC$)
محصور داخل دائرة.
المستقيم CD يمسّ الدائرة في النقطة C .
معطى أنّ $AD \parallel BC$ (انظر الرسم).
أ. برهن أنّ المثلّث ACD هو مثلّث متساوي الساقين.
AD يقطع الدائرة في النقطة K .
برهن أنّ:
ب. $\sphericalangle CKD = \sphericalangle ABC$.
جـ. $\triangle ABC \cong \triangle CKD$.

إجابة السؤال 4

أ.	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$	الزاوية بين المماسّ والوتر تساوي الزاوية المحيطيّة التي تستند على هذا الوتر من جهته الثانية
نرمز $\sphericalangle ABC = \alpha$ ، ونحصل على:	$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = 90^o - \frac{\alpha}{2}$	BCA هو مثلّث متساوي الساقين
حسب المعطى:	$AD \parallel BC$ $\Downarrow$	
	$\sphericalangle BCA = \sphericalangle CAD = 90^o - \frac{\alpha}{2}$	الزاويتان المتبادلتان بين مستقيمين متوازيين متساويتان.
في المثلّث ADC يتحقّق:	$\sphericalangle ADC = 180^o - (\sphericalangle ACD + \sphericalangle CAD)$ $\Downarrow$ $\sphericalangle ADC = 180^o - (\alpha + 90^o - \frac{\alpha}{2}) = 90^o - \frac{\alpha}{2}$ $\Downarrow$ $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD$ $\Downarrow$	
	$AC = DC$	في المثلّث مقابل الزوايا المتساوية الأضلاع متساوية

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

ب. الشكل الرباعيّ AKCB محصور داخل دائرة، لذلك: $\sphericalangle AKC = 180^{o} - \alpha$ — مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعيّ المحصور داخل دائرة يساوي 180^{o}

$\Downarrow$

$\sphericalangle CKD = 180^{o} - \sphericalangle AKC$ — مجموع الزاويتين المتجاورتين هو 180^{o}

$\Downarrow$

$\sphericalangle CKD = 180^{o} - (180^{o} - \alpha) = \alpha$

$\Downarrow$

$\sphericalangle CKD = \sphericalangle ABC = \alpha$

جـ. $\sphericalangle KCD = \sphericalangle CAK = 90^{o} - \frac{\alpha}{2}$ — الزاوية بين المماسّ والوتر تساوي الزاوية المحيطيّة التي تستند على هذا الوتر من جهته الثانية

وجدنا في البند "أ": $\sphericalangle KDC = 90^{o} - \frac{\alpha}{2}$

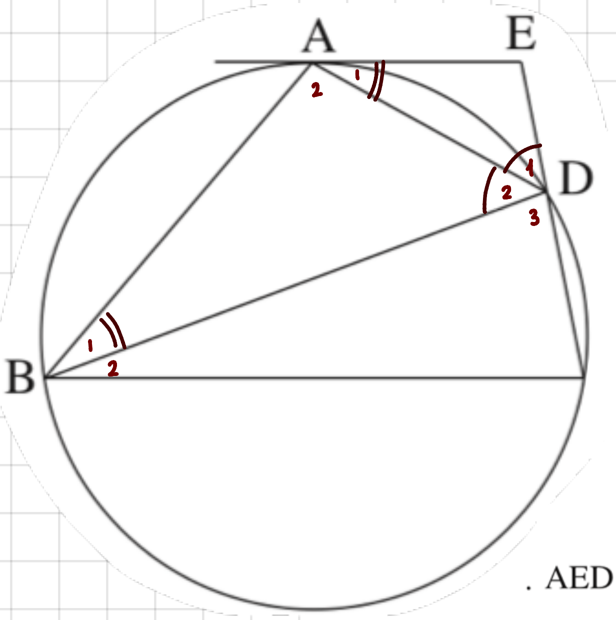
من هنا: $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = \sphericalangle KCD = \sphericalangle KDC$

وجدنا أيضًا أنّ: $AC = DC$

من هنا: $\triangle ABC \cong \triangle CKD$ — حسب ز.ض.ز.

/يتبع في صفحة 9/

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٥ - سؤال ٤



4. الشكل الرباعيّ ABCD محصور في دائرة.

مرّروا في النقطة A مماسًا للدائرة.

المماسّ يلتقي مع امتداد CD في النقطة E (انظر الرسم).

معطى أنّ: AD هو منصّف الزاوية EDB.

أ. برهن أنّ $\triangle AED \sim \triangle BAD$.

معطى أيضًا أنّ مساحة المثلّث BAD هي أربعة أضعاف مساحة المثلّث AED.

ب. احسب بكم ضعف محيط المثلّث BAD أكبر من محيط المثلّث AED.

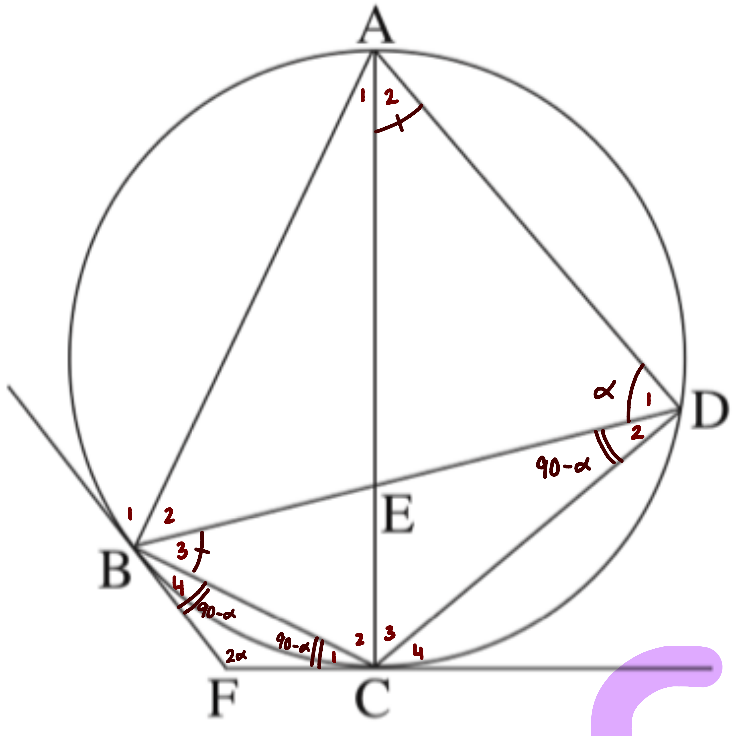
جـ. معطى أيضًا أنّ $AD = a$.

(1) عبّر بدلالة a عن طول BD.

(2) جد النسبة $\frac{BD}{DE}$.

إدعاء	شرح
أ. (1) $\angle B_1 = \angle A_1$	الزاوية المحصورة بين مماس (AE) ووتر (AD) يساوي الزاويه المحيطيه المقابله للوتر
(2) $\triangle AED \sim \triangle BAD$ حسب ز.ز	ز. $\angle A_1 = \angle B_1$ (ادعاء 1) ز. $\angle D_1 = \angle D_2$ (معطى) وهو المطلوب.
ب. (3) $\frac{AE}{BA} = \frac{ED}{AD} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$	النسبه بين مساحة $S_{\triangle BAD}$ و $S_{\triangle AED}$ هو 4:1 اذاً النسبه بين اضلاعهم هو جذر النسبه بين مساحتهم.
(4) محيط $\triangle BAD$ أكبر بضعفين من محيط $\triangle AED$.	حسب ادعاء 3. وهو المطلوب.
جـ1. (5) $BD = 2a$	من ادعاء 3: $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$ $\xleftarrow{a}$ (معطى) وهو المطلوب.
جـ2. (6) $\frac{BD}{DE} = 4$	من ادعاء 3: $\frac{ED}{AD} = \frac{AD}{BD}$ ← $\frac{ED}{a} = \frac{a}{2a}$ ← $ED = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$ $\frac{BD}{DE} = \frac{2a}{(\frac{a}{2})} = 4$ ⟸ وهو المطلوب.

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٤



4. الشكل الرباعيّ ABCD محصور في دائرة.
قطرا الشكل الرباعيّ يلتقيان في النقطة E .
مرّروا مماسًّا للدائرة في النقطة B
ومماسًّا للدائرة في النقطة C .
يلتقي المماسّان في النقطة F (انظر الرسم).
معطى أنّ : $\sphericalangle ABC = 90^o$

أ. (1) برهن أنّ : $\sphericalangle ADB + \sphericalangle FBC = 90^o$.
(2) برهن أنّ : $\sphericalangle BFC = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.

ب. (1) برهن أنّ : $\triangle BEC \sim \triangle AED$.
(2) معطى أيضًا أنّ : $BE \cdot DE = 21$ ، $AE = 7$.
جد قطر الدائرة.

ملاحظة: حلّ البند "ب" لا يتعلّق بحلّ البند "أ".

	إدعاء	شرح
أ.1 (1)	$\sphericalangle B_4=\sphericalangle D_2$	الزاوية المحيطيه المحصورة بين مماس ووتر تساوي الزاوية المحيطيه المقابله للوتر
(2)	$\sphericalangle D_{12}=\sphericalangle B_{23}=90^\circ$	في شكل رباعي محصور بدائرة , مجموع كل زوج زوايا متقابله 180° + معطى $\sphericalangle B_{12}=90^\circ$
(3)	$\sphericalangle D_1+\sphericalangle B_4=90^\circ$	ادعاء 2+1 وهو المطلوب
أ.2 (4)	$BF=FC$	المماسات الخارجان من نفس النقطة للدائرة , متساويان
(5)	$\sphericalangle B_4=\sphericalangle C_1=90-\alpha$	$\sphericalangle D_1=\alpha$ فرضيه ← $\sphericalangle B_4=90-\alpha$ (ادعاء 3) $\triangle BCF$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية
(6)	$\sphericalangle F=2\sphericalangle D_1=2\alpha$	$\triangle BCF$ مجموع زوايا المثلث 180° وهو المطلوب
ب.1 (7)	$\triangle BEC \sim \triangle AED$ حسب ز.ز	ز. $\sphericalangle BEC=\sphericalangle AED$ زوايا متقابله بالرأس متساوية ز. $\sphericalangle B_3=\sphericalangle A_2$ زوايا محيطيه تقابل نفس الوتر (CD) هم متساوية وهو المطلوب
ب.2 (8)	$EC=3$ سم	نسب التشابه : $\frac{BE}{AE}=\frac{EC}{ED}=\frac{BC}{AD}$ $BE\cdot ED=AE\cdot EC$ $21=7\cdot EC$
(9)	$AC=10$ سم قطر الدائرة	زاويه محيطيه شاقه $\sphericalangle D=90^\circ$ تقابل قطر الدائرة + ادعاء 8 وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ موعد ب - سؤال ٤

4. النقطة B هي إحدى نقطتَي التقاطع بين دائرتين، I وَ II .

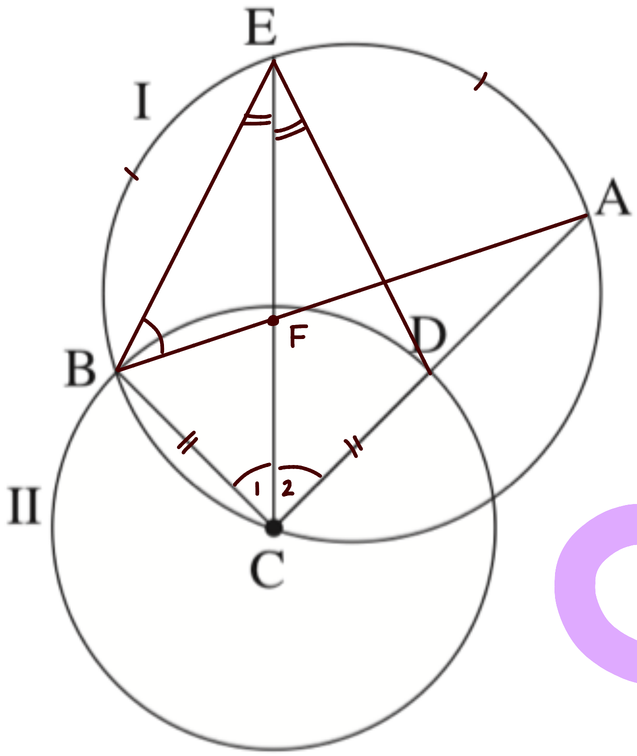
النقطة C هي مركز الدائرة II ، وتقع هذه النقطة على محيط الدائرة I .

النقطتان A وَ E تقعان على محيط الدائرة I

بحيث $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{EA}$.

الوتر AC يقطع الدائرة II في النقطة D

(انظر الرسم).



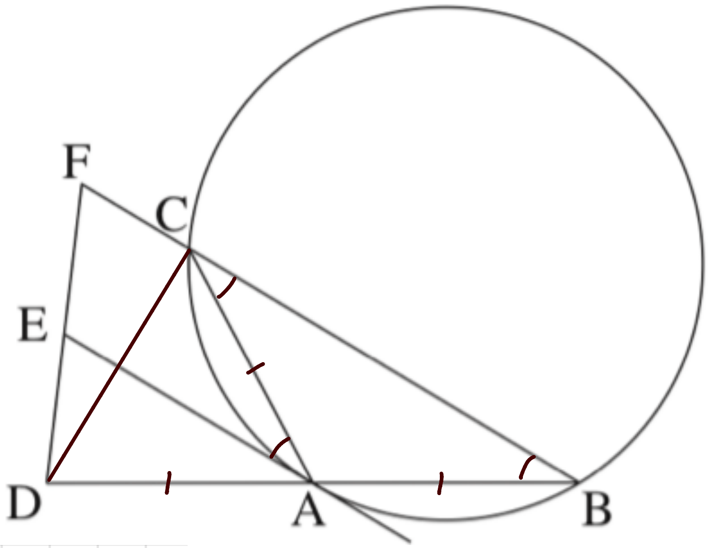
أ. برهن أنّ: $\Delta EBC \cong \Delta EDC$.

ب. الوتر EC يقطع الوتر AB في النقطة F.

برهن أنّ: $\Delta EBF \sim \Delta ECD$.

	ادعاء	شرح
أ.	(1) $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$	زوايا محيطيه تقابل اقواس متساويه ($\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{EA}$) هي متساوية
	(2) $\Delta EBC \cong \Delta EDC$ حسب ض.ز.ض	ض EC ضلع مشترك ز $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$ (ادعاء ١) ض $BC = CD$ (انصاف اقطار بالدائرة II)
		وهو المطلوب
ب.	(3) $\measuredangle C_2 = \measuredangle EBA$	زوايا محيطيه تقابل نفس القوس ($\overset{\frown}{EA}$) هي متساوية
	(4) $\measuredangle BEC = \measuredangle CED$	زوايا محيطيه تقابل اوتار متساوية هي متساوية. ($BC = CD$).
	(5) $\Delta EBF \sim \Delta ECD$ حسب ز.ز	ز (ادعاء 3) ز (ادعاء 4)
		وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٦ - سؤال ٤



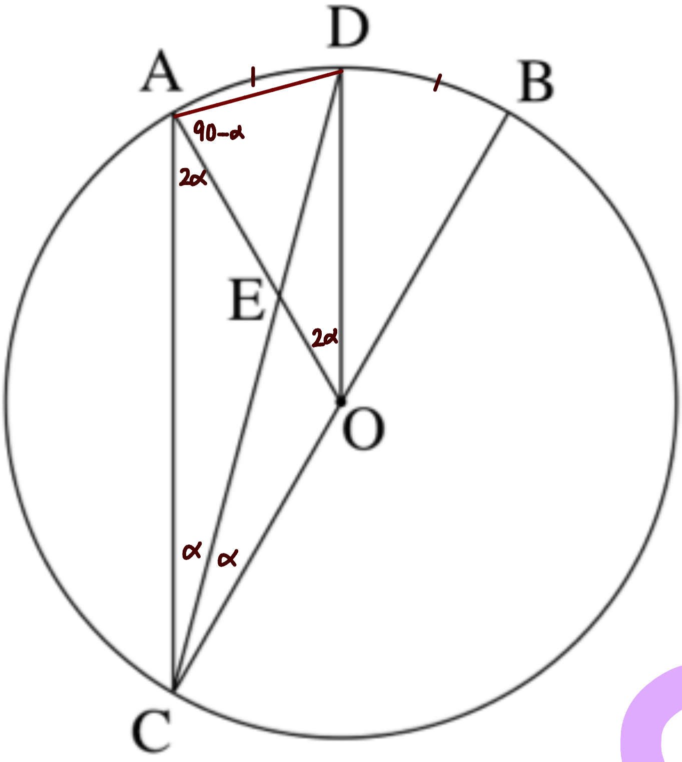
4. المثلّث المتساوي الساقين ABC $(AB = AC)$ محصور داخل دائرة.
النقطة D تقع على امتداد الضلع AB بحيث $DA = AB$.
النقطة F تقع على امتداد الضلع BC.
مرّروا عبر النقطة A مماسًّا للدائرة يقطع FD في النقطة E (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ AE هو قاعدة وسطى في المثلّث BDF.

ب. برهن أنّ $DC \perp BC$.

	إدعاء	شرح
أ. (1)	$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBA$	ΔABC متساوي الساقين ، لذلك زوايا القاعدة متساوية
(2)	$\sphericalangle CAE = \sphericalangle CBA$	الزاوية المحصورة بين مماس (AE) ووتر (AC) تساوي الزاوية المحيطية المقابلة للوتر
(3)	$EA \parallel FB$	من ادعاء 1+2 ينتج $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ACB$ زوايا متبادلة متساوية
(4)	AE قطعة متوسطة بالمثلث ΔDFB	مثلث به قطعة تنصّف احدى اضلاع المثلث وتوازي ضلع آخر هي قطعة متوسطة وهو المطلوب
ب. (5)	ΔDCB مثلث قائم $(DC \perp BC)$	مثلث به متوسط لضلع $(DA = AB)$ الذي يساوي نصف نفس الضلع $(CA = \frac{1}{2} DB)$ هو مثلث قائم. وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٦ - سؤال ٤



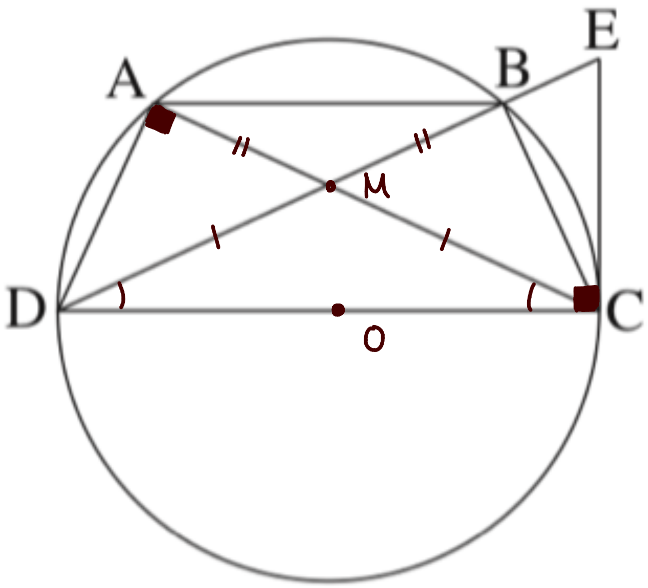
4. BC هو قطر في دائرة مركزها O .
الوتر CD يقطع نصف القطر AO في النقطة E .
النقطة D هي منتصف القوس AB (انظر الرسم).
نرمز $\sphericalangle ACD = \alpha$.

أ. (1) برهن أنّ $\sphericalangle ACO = \sphericalangle AOD$.
(2) برهن أنّ $AC \parallel DO$.

ب. (1) عبّر بدلالة α عن مقدار الزاوية DAO .
(2) جد ماذا يجب أن تكون قيمة α ، حتّى يكون الشكل الرباعيّ ACOD متوازي أضلاع. علّل.

		إدعاء	شرح
1أ.	(1)	$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \alpha$	زوايا محيطيه تقابل اقواس متساوية ($\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$) هي متساوية
	(2)	$\sphericalangle AOD = 2 \cdot \sphericalangle ACD = 2\alpha$	الزاوية المحيطيه تساوي نصف الزاوية المركزية التي تقابل نفس القوس ($\overset{\frown}{AD}$)
	(3)	$\sphericalangle ACO = \sphericalangle AOD = 2\alpha$	من ادعاء 1+2 وهو المطلوب
2أ.	(4)	$\sphericalangle CAO = \sphericalangle OCA = 2\alpha$	$\triangle AOC$ مثلث متساوي الساقين (AO, CO انصاف اقطار) لذلك زوايا القاعدة متساوية
	(5)	$AC \parallel DO$	$\sphericalangle CAO = \sphericalangle AOD = 2\alpha$ زوايا متبادلة متساوية وهو المطلوب
1ب.		$\sphericalangle ADO = \sphericalangle DAO = 90-\alpha^\circ$	$\triangle ADO$ مثلث متساوي الساقين (AO, DO انصاف اقطار) لذلك زوايا القاعدة متساوية + مجموع زوايا المثلث 180° وهو المطلوب
2ب.		$90-\alpha+2\alpha+2\alpha = 180^\circ$ $3\alpha = 90^\circ$ $\alpha = 30^\circ$	كي يكون ACOD متوازي اضلاع يجب ان يكون كل زوج اضلاع متقابلة متوازية. $AC \parallel DO$ من بند ب 1. كي يتحقق ان $AD \parallel CO$ ، يجب ان يتحقق ان $\sphericalangle CAD + \sphericalangle ACO = 180^\circ$. وهو المطلوب

4. شبه المنحرف المتساوي الساقين ABCD محصور في دائرة.
المماسّ للدائرة في النقطة C يلتقي في النقطة E
مع امتداد قطر شبه المنحرف، DB .
CD هو قطر في الدائرة (انظر الرسم).
أ. برهن أنّ: $\Delta DAC \sim \Delta ECD$.
ب. معطى أنّ: $AC = 25$ سم ، $DE = 36$ سم .
احسب نصف قطر الدائرة.
جـ. احسب مساحة المثلّث DAC .



إدعاء		شرح
أ. (1)	$\sphericalangle DAC = 90°$	الزاوية المحيطيه المقابله لقطر الدائرة (DC) هي قائمه
(2)	$\sphericalangle ECD = 90°$	الخط النازل من مركز الدائرة للمماس (EC) يعامدها بنقطة التماس
(3)	$AM = MB$, $DM = MC$ $AC = BD$	ABCD شبه منحرف متساوي الساقين لذلك اقطاره متساوية وتتقاطع بحيث كل قطعتين بجانب كل قاعدة متساوية
(4)	$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD$	ΔDMC متساوي الساقين (من ادعاء 3) لذلك زوايا القاعدة متساوية
(5)	$\Delta DAC \sim \Delta ECD$ حسب ز.ز	ز. $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ECD$ (ادعاء 1+2) ز. $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD$ (ادعاء 4)

وهو المطلوب

ب. نسب التشابه : $\frac{DA}{EC} = \frac{AC}{CD} = \frac{DC}{ED}$

$\frac{25}{CD} = \frac{CD}{36}$ (ادعاء 3) $AC = DB = 25$ سم

$CD^2 = 900$

$CD = 30$ سم ← نصف القطر = 15 سم

وهو المطلوب

ج. ΔDAC فيثاغورس : $AD^2 + AC^2 = DC^2$

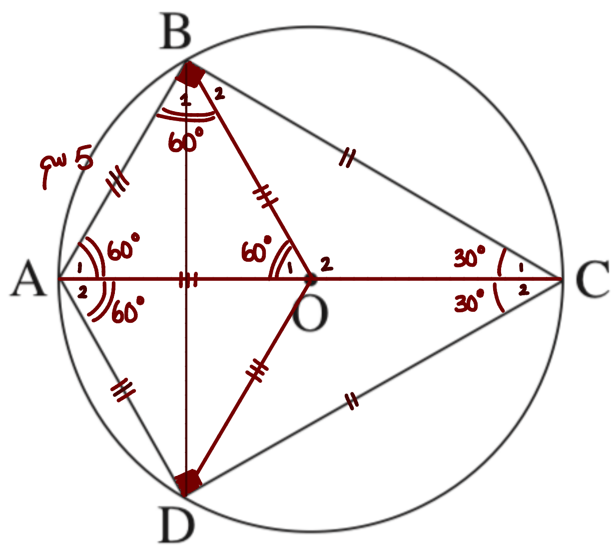
$AD^2 = 30^2 - 25^2 = 275$

$AD = \sqrt{275}$ سم

$S_{\Delta DAC} = \frac{AC \cdot AD}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{275}}{2} = 207.28$ سم² ←

وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٧ - سؤال ٤



4. معطى دالتون ABCD ($AB = AD$ ، $BC = DC$)، محصور داخل دائرة مركزها O، كما هو موصوف في الرسم.

معطى أنّ: $\measuredangle BCD = 60^\circ$.

أ. (1) برهن أنّ: $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90^\circ$.

(2) برهن أنّ: ΔABO هو مثلّث متساوي الأضلاع.

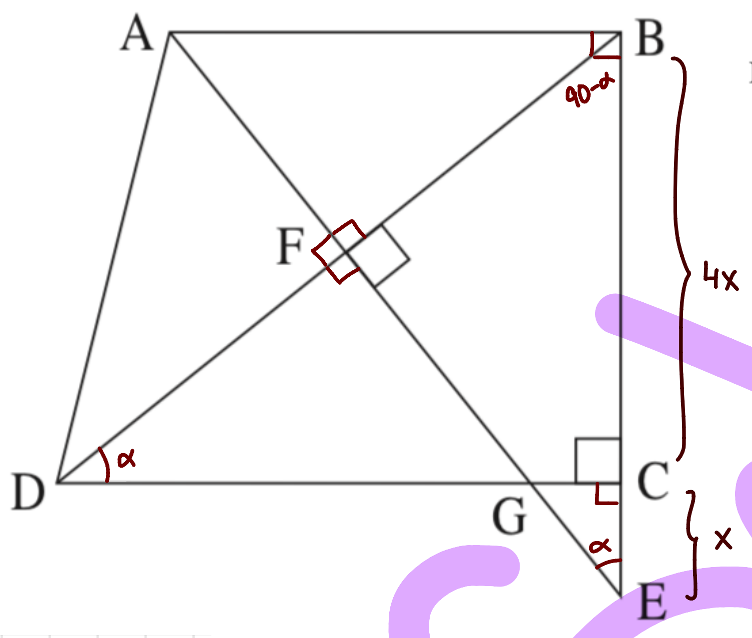
ب. برهن أنّ: الشكل الرباعيّ ABOD هو معيّن.

جـ. معطى أنّ: $AB = 5$ سم. جد BC .

د. بيّن أنّ $\Delta ABO \sim \Delta BCD$.

	إدعاء	شرح
أ. (1)	$\measuredangle B = \measuredangle D = 90^\circ$	بالدالتون الزاويتان الجانبيتان متساويتان $\measuredangle B=\measuredangle D$ شكل رباعي محصور داخل دائرة، مجموع كل زوج زوايا متقابلة 180° $\measuredangle B+\measuredangle D=180^\circ$ وهو المطلوب
أ. (2)	AC قطر الدائرة	$\measuredangle B=90^\circ$ الزاوية المحيطية القائمة تقابل قطر الدائرة.
(3)	$\measuredangle A=120^\circ$	شكل رباعي محصور داخل دائرة، مجموع كل زوج زوايا متقابلة 180° $\measuredangle A+\measuredangle C=180^\circ$ معطى $\measuredangle C=60^\circ$
(4)	$\measuredangle A_1=\measuredangle A_2=60^\circ$, $\measuredangle C_1=\measuredangle C_2=30^\circ$	القطر الرأسي بالدالتون ينصف زوايا الرأس + ادعاء 3
(5)	ΔABO مثلث متساوي الأضلاع ($AB=AO=BO$)	$AO=BO$ انصاف اقطار ← ΔABO متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية $\measuredangle A_1=\measuredangle B_1=60^\circ$ ، مجموع زوايا المثلث 180° ← $\measuredangle O_1=60^\circ$ ΔABO كل زواياه 60° اذاً هو متساوي الأضلاع. وهو المطلوب
ب. (6)	ΔAOD متساوي الاضلاع ($AO=OD=AD$)	$AO=AD$ من ادعاء 5 + $AO=OD$ انصاف اقطار
(7)	ABOD معين	شكل رباعي كل اضلاعه متساوية هو معين (ادعاء 5+6) وهو المطلوب
ج. (8)	$BC^2=10^2-5^2=75$ $BC=\sqrt{75}=8.66$ سم	ΔABC مثلث قائم $AB=5$ سم , $AC=10$ سم . فيثاغورس: $AC^2=AB^2+BC^2$
د. (9)	ΔBDC مثلث متساوي الأضلاع	ΔBDC مثلث متساوي الساقين (معطى $BC=CD$) لذلك زوايا القاعدة متساوية ومجموع زوايا المثلث 180° ← كل زوايا المثلث متساوية (60°) .
(10)	$\Delta ABO \sim \Delta BCD$	المثلثين متساوي الاضلاع (كل زواياهم متساوية) وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال٤



4. ABCD هو شبه منحرف قائم الزاوية ($AB \parallel DC$ ، $\measuredangle BCD = 90^o$).

E هي نقطة على امتداد الضلع BC

بحيث تكون القطعة AE معامدة للقطر BD

وتقطعه في النقطة F .

AE يقطع القطعة DC في النقطة G ،

كما هو موصوف في الرسم.

أ. برهن أنّ: $\measuredangle AEB = \measuredangle BDC$.

معطى أنّ: $DC = BE$.

ب. برهن أنّ: $\Delta DCB \cong \Delta EBA$.

معطى أنّ $CB = 4CE$.

جـ. (1) برهن أنّ: $\Delta GCE \sim \Delta ABE$.

(2) جد النسبة $\frac{GC}{AB}$.

أ. نفرض انّ $\measuredangle E = \alpha$ ← $\measuredangle FBE = 90-\alpha^\circ$ (مجموع زوايا المثلث ΔFBE هو 180°)

← $\measuredangle BDC = \alpha^\circ$ (مجموع زوايا المثلث ΔBDC هو 180°)

⇐ $\measuredangle AEB = \measuredangle BDC = \alpha^\circ$

وهو المطلوب

ب. $\Delta DCB \cong \Delta EBA$ حسب ز.ض.ز :

ز. $\measuredangle BDC = \measuredangle AEB = \alpha^\circ$ (بند أ)

ض. $DC = BE$ (معطى)

ز. $\measuredangle DCB = \measuredangle ABE = 90^\circ$

وهو المطلوب

ج1. $\Delta GCE \sim \Delta ABE$ حسب ز.ز :

ز. $90^\circ = \measuredangle B = \measuredangle GCE$

ز. $\measuredangle E$ زاوية مشتركة

وهو المطلوب

ج2. نفرض $CE = x$ ← $BC = 4x$ ← $BE = 5x$

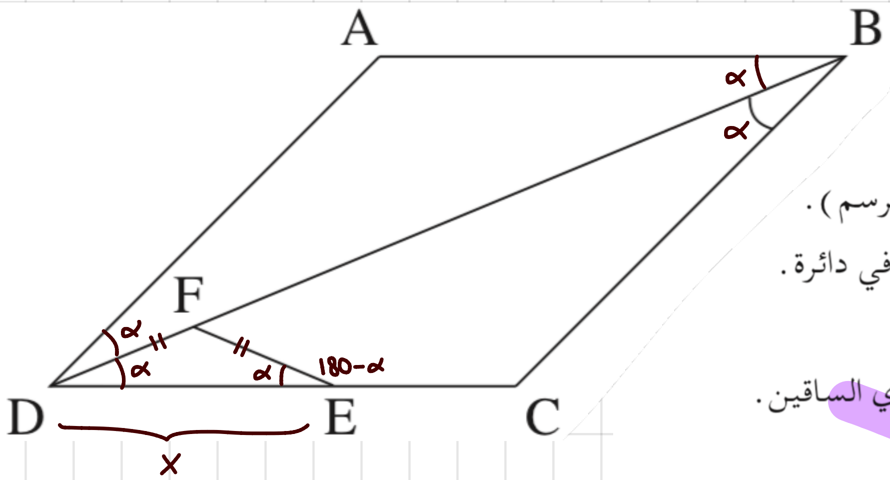
نسب التشابه من بند ج1 :

$$\underbrace{\frac{GC}{AB} = \frac{CE}{BE}} = \frac{GE}{AE}$$

$$\frac{GC}{AB} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ موعد ب - سؤال ٤



.4 ABCD هو معيَّن.
النقطة E تقع على الضلع DC
والنقطة F تقع على قطر المعيَّن، DB (انظر الرسم).
معطى أنّ الشكل الرباعيّ BCEF قابل للحصر في دائرة.

أ. (1) برهن أنّ $\sphericalangle FED = \sphericalangle CBD$.
(2) برهن أنّ المثلّث DFE هو متساوي الساقين.

ب. برهن أنّ: $\Delta DFE \sim \Delta DCB$.

جـ. معطى أنّ: $DB = 3DE$ ، مساحة المثلّث DFE هي 2 سم^2.
احسب مساحة المعيَّن ABCD .

إدعاء	شرح
أ1. (1) $\sphericalangle FBC=\alpha$, $\sphericalangle FEC=180^\circ-\alpha$	نفرض $\sphericalangle FBC=\alpha$. BCEF شكل رباعي قابل للحصر في دائرة لذلك مجموع كل زوج زوايا متقابلة هو 180° ← $\sphericalangle FBC+\sphericalangle FEC=180^\circ$.
(2) $\sphericalangle FED=\sphericalangle CBD=\alpha$	DEC خط مستقيم. $\sphericalangle FED$ المكمّل لـ $\sphericalangle FEC$ + ادعاء ١. وهو المطلوب
أ2. (3) $\sphericalangle ADB=\sphericalangle BDC=\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBA=\alpha$	ABCD معين لذلك كل زوج زوايا متقابلة متساوية ← $\sphericalangle D=\sphericalangle B$, $\sphericalangle A=\sphericalangle C$ وايضاً اقطار المعين تنصّف زوايا الشكل.
(4) ΔDFE متساوي الساقين	ΔDFE به زاويتين متساويتين $(\alpha=\sphericalangle FDE=\sphericalangle FED)$ لذلك هو متساوي الساقين وهو المطلوب
ب. (5) $\Delta DFE \sim \Delta DCB$ حسب ز.ز	ز. $\sphericalangle FDE=\sphericalangle CDB=\alpha$ ز $\sphericalangle FED=\sphericalangle DBC=\alpha$ وهو المطلوب
جـ. (6) $S_{\Delta BDC}=\frac{2\cdot 9}{1}=18$ سم^2	المثلثين المتشابهين: $\Delta DFE \sim \Delta DCB$ نسب بين اضلاعهم 1 : 3 نسب بين مساحاتهم 1 : 9 (هو تربيع نسبة الاضلاع) معطى/مطلوب 2 سم^2 : ?
(7) $S_{ABCD}=36$ سم^2	قطر المعين ينصّف المعين لمثلثين متطابقين مساحتهما متساوية. $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BCD}=18$ سم^2 وهو المطلوب