السؤال 1

خرج راكب درّاجة هوائيّة من البلدة A وسافر بسرعة ثابتة إلى البلدة B .

وصل الراكب إلى البلدة B وعاد فورًا إلى البلدة A .

البُعد بين البلدة A والبلدة B هو 30 كم.

سرعة الراكب في طريقه عائدًا إلى البلدة A كانت أصغر بـِ 3 كم/الساعة من سرعته في طريقه إلى البلدة B.

زمن سفره عائدًا إلى البلدة A كان أطول بـ 50 دقيقة من زمن سفره إلى البلدة B .

أ. جد سرعة راكب الدرّاجة الهوائيّة في طريقه إلى البلدة B .

ب. جد في أيّ بُعد عن البلدة B كان الراكب بعد مرور $3\frac{1}{2}$ ساعات منذ لحظة خروجه من البلدة A.

إجابة السؤال 1

نرمز: v – سرعة الراكب بالكيلومترات/الساعة في طريقه من A إلى B

	السرعة (كم/الساعة)	المسافة (كم)	الزمن (ساعات)
في الطريق من A إلى B	v	30	$\frac{30}{v}$
في الطريق من B إلى A	$v-3$	30	$\frac{30}{v}+\frac{50}{60}$

أ. المسافة من B إلى A تحقّق:

$$30=(v-3)\cdot\left(\frac{30}{v}+\frac{5}{6}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$v^2-3v-108=0$$
$$\Downarrow$$

$v>0$ ، لذلك: $v =$ 12 كم/الساعة

ب. زمن السفر من A إلى B هو: $\frac{30}{v}=\frac{30}{12}=$ 2.5 ساعة

$$\Downarrow$$

زمن السفر من B باتّجاه A : $3.5-2.5=$ 1 ساعة

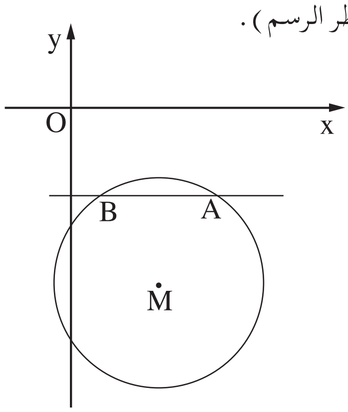
لذلك المسافة التي قطعها الراكب بعد خروجه من B : $1\times(v-3)=1\times(12-3)=$ 9 كم

/يتبع في صفحة 3/

السؤال 2

المستقيم $y = -3$ يقطع دائرة في النقطتين A وَ B (انظر الرسم).

النقطة A تقع أيضًا على المستقيم $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.



أ. جد إحداثيّات النقطة A .

ب. معطى أنّ مركز الدائرة هو $M(3, -6)$.
جد معادلة الدائرة.

جـ. جد مساحة الشكل الرباعيّ OAMB
(O — نقطة أصل المحاور).

إجابة السؤال 2

أ. المستقيم $y = -3$ يوازي المحور x ،

لذلك الإحداثيّ y لِـ A هو: $y_A = -3$

نعوّض $y = -3$ في معادلة المستقيم، وينتج: $-3 = -\frac{2}{3}x_A + \frac{1}{3}$

$$\Downarrow$$

$$x_A = 5$$

إحداثيّات A هي: $A(5, -3)$

ب. حسب المعطى إحداثيّات المركز هي: $M(3, -6)$

من هنا مربّع نصف القطر هو: $R^2 = MA^2 = (5-3)^2 + (-3+6)^2 = 13$

لذلك، معادلة الدائرة هي: $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 13$

/يتبع في صفحة 4/

تكملة إجابة السؤال 2.

جـ. الشكل الرباعيّ OABM مكوَّن من مثلّثين:
$\triangle OAB$ وَ $\triangle ABM$ ،

لذلك مساحة الشكل الرباعيّ هي: $S_{AOBM} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle ABM}$

الارتفاع من O على AB هو: $0-(-3)=3$

الارتفاع من $M(3,-6)$ على AB هو: $-3-(-6)=3$

لذلك، للمثلّثين OAB وَ ABM
قاعدة مشتركة AB ونفس الارتفاع على هذه القاعدة، لذلك: $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle ABM}$

B على المستقيم $y=-3$ ، لذلك $y_B=-3$.
نعوّض $y=-3$ في معادلة الدائرة
ونجد الإحداثيّ x لِـ B: $(x_B-3)^2+(-3+6)^2=13$

$$\Downarrow$$

$x_B \neq 5$ لأنّ $B \neq A$ ، لذلك: $x_B=1$

من هنا: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (5-1) = 6$

$$S_{AOBM} = 2 \cdot S_{\triangle OAB} = 2 \cdot 6 = 12$$

/يتبع في صفحة 5/

السؤال 3

أجرى قسم التربية في مدينة كبيرة استطلاعًا للرأي شارك فيه جميع المعلّمين الذين يعلّمون في المؤسّسات التعليميّة في المدينة.
سُئل المعلّمون ما هي الساعة التي يفضّلون بدء اليوم التعليميّ فيها:
الساعة 8:00 أم الساعة 9:00 .

$\frac{1}{5}$ المشاركين في الاستطلاع هم نساء يُفضِّلن بدء التعليم في الساعة 8:00 .
$\frac{1}{4}$ النساء اللواتي شارَكْنَ في الاستطلاع يُفضِّلن بدء التعليم في الساعة 8:00 .
$\frac{1}{2}$ الرجال الذين شاركوا في الاستطلاع يُفضِّلون بدء التعليم في الساعة 8:00 .

أ. نختار بشكل عشوائيّ معلّمًا (رجلاً/امرأة) من بين المشاركين في الاستطلاع.
ما هو الاحتمال بأنّه يُفضِّل بدء التعليم في الساعة 8:00 ؟

ب. نختار بشكل عشوائيّ من بين المشاركين في الاستطلاع معلّمًا (رجلاً/امرأة) يُفضِّل بدء التعليم في الساعة 9:00 .
ما هو الاحتمال بأن تكون قد اختيرت امرأة؟

جـ. نختار عشوائيًّا 5 معلّمين (رجالاً/نساءً) من بين المشاركين في الاستطلاع.
ما هو الاحتمال بأن يكون واحد منهم بالضبط يُفضِّل بدء التعليم في الساعة 9:00 ؟

إجابة السؤال 3

نرمز: A – مجموعة النساء
B – مجموعة الذين يفضّلون البدء في الساعة 8:00

أ. حسب المعطى: $P(B/A) = \frac{1}{4} \qquad P(B \cap A) = \frac{1}{5}$

$$\Downarrow$$

$$P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B/A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{5}$$

حسب المعطى $P(B/\overline{A}) = \frac{1}{2}$ ، لذلك: $P(B \cap \overline{A}) = P(B/\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

$$\Downarrow$$

احتمال اختيار معلّم يفضّل البدء في الساعة 8:00 هو: $P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

/يتبع في صفحة 6/

تكملة إجابة السؤال 3.

ب. الاحتمال المطلوب هو: $P(A/\overline{B})$

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A\cap\overline{B})=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

من هنا: $$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{10}}=\frac{6}{7}$$

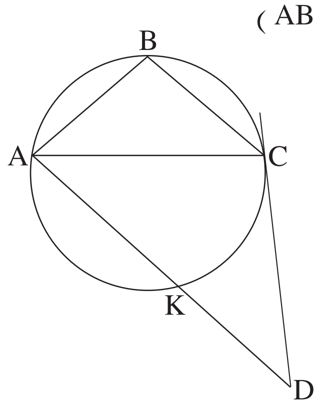
جـ. وجدنا أنّ احتمال اختيار معلّم يفضّل البدء في الساعة 9:00 هو: $P(\overline{B})=\frac{7}{10}$

لذلك الاحتمال المطلوب هو: $P_5(1)=\binom{5}{1}\cdot\frac{7}{10}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^4=0.02835$

/يتبع في صفحة 7/

السؤال 4

المثلّث المتساوي الساقين (والمنفرج الزاوية) ABC ($AB = BC$)
محصور داخل دائرة.
المستقيم CD يمسّ الدائرة في النقطة C .
معطى أنّ $AD \parallel BC$ (انظر الرسم).



أ. برهن أنّ المثلّث ACD هو مثلّث متساوي الساقين.

AD يقطع الدائرة في النقطة K .

برهن أنّ:

ب. $\sphericalangle CKD = \sphericalangle ABC$.

جـ. $\triangle ABC \cong \triangle CKD$.

إجابة السؤال 4

أ.	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$	الزاوية بين المماسّ والوتر تساوي الزاوية المحيطيّة التي تستند على هذا الوتر من جهته الثانية
نرمز $\sphericalangle ABC = \alpha$ ، ونحصل على:	$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = 90^o - \frac{\alpha}{2}$	BCA هو مثلّث متساوي الساقين
حسب المعطى:	$AD \parallel BC$ $\Downarrow$ $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CAD = 90^o - \frac{\alpha}{2}$	الزاويتان المتبادلتان بين مستقيمين متوازيين متساويتان.
في المثلّث ADC يتحقّق:	$\sphericalangle ADC = 180^o - (\sphericalangle ACD + \sphericalangle CAD)$ $\Downarrow$ $\sphericalangle ADC = 180^o - (\alpha + 90^o - \frac{\alpha}{2}) = 90^o - \frac{\alpha}{2}$ $\Downarrow$ $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD$ $\Downarrow$ $AC = DC$	في المثلّث مقابل الزوايا المتساوية الأضلاع متساوية

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

ب. الشكل الرباعيّ AKCB محصور داخل دائرة، لذلك: $\sphericalangle AKC = 180^o - \alpha$ — مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعيّ المحصور داخل دائرة يساوي 180^o

$\Downarrow$

$\sphericalangle CKD = 180^o - \sphericalangle AKC$ — مجموع الزاويتين المتجاورتين هو 180^o

$\Downarrow$

$\sphericalangle CKD = 180^o - (180^o - \alpha) = \alpha$

$\Downarrow$

$\sphericalangle CKD = \sphericalangle ABC = \alpha$

جـ. $\sphericalangle KCD = \sphericalangle CAK = 90^o - \frac{\alpha}{2}$ — الزاوية بين المماسّ والوتر تساوي الزاوية المحيطيّة التي تستند على هذا الوتر من جهته الثانية

وجدنا في البند "أ": $\sphericalangle KDC = 90^o - \frac{\alpha}{2}$

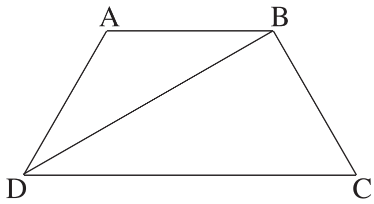
من هنا: $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = \sphericalangle KCD = \sphericalangle KDC$

وجدنا أيضًا أنّ: $AC = DC$

من هنا: $\triangle ABC \cong \triangle CKD$ — حسب ز.ض.ز.

/يتبع في صفحة 9/

السؤال 5



ABCD هو شبه منحرف متساوي الساقين
($AB < DC$, $AB \parallel DC$)
(انظر الرسم) .
معطى أنّ : $AD = AB = BC = m$
$\sphericalangle ABD = \alpha$

أ. معطى أنّ مساحة المثلّث DAB هي $\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$.
جد α .

ب. معطى أنّ مساحة شبه المنحرف ABCD هي $27\sqrt{3}$.
جد m .

إجابة السؤال 5

أ. في المثلّث المتساوي الساقين ABD يتحقّق : $\sphericalangle BAD = 180^o - 2\alpha$

$\Downarrow$

$AD = AB = m$ ، لذلك : $S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2}m^2\sin(180^o - 2\alpha)$

$\Downarrow$

$$\frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}m^2\sin(2\alpha)$$

$\Downarrow$

$$\sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Downarrow$

حلّا المعادلة بالنسبة لـِ $180^o < \alpha < 0^o$ هما : $\alpha = 30^o$, $\alpha = 60^o$

$\Downarrow$

$\sphericalangle DAB$ هي زاوية منفرجة لأنّ $AB < DC$ ،
وهي $180^o - 2\alpha$ ، لذلك : $\alpha = 30^o$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب. $S_{\text{شبه المنحرف}} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DBC}$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD$

$\Downarrow$

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ ، وجدنا أنّ $\alpha = 30^o$ ، لذلك: $\sphericalangle DBC = (180^o - 2\alpha) - \alpha = 90^o$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot BC$$

في المثلّث المتساوي الساقين ABD يتحقّق: $\frac{\frac{1}{2}DB}{AD} = \cos \sphericalangle ABD = \cos 30^o$

$\Downarrow$

$$DB = 2 \cdot m \cdot \cos 30^o = m\sqrt{3}$$

من هنا: $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot m\sqrt{3} \cdot m = \frac{m^2\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\text{شبه المنحرف}} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} + \frac{m^2\sqrt{3}}{2} = \frac{m^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4}$$

$\Downarrow$

$$27\sqrt{3} = \frac{m^2 3\sqrt{3}}{4}$$

$\Downarrow$

$$m = 6$$

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 6

معطاة الدالّة $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2}$.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) جد خطوط تقارب الدالّة $f(x)$ ، الموازية للمحورين.

(3) جد نقاط تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

(4) جد إشارة دالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $x < 5$ ،

وجد إشارة دالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $x > 5$.

ب. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

جـ. مرّروا مستقيمًا يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x = 4$.

جد إحداثيّات نقاط تقاطُع المماسّ مع خطوط تقارب الدالّة $f(x)$.

إجابة السؤال 6

أ. (1) يجب أن يتحقّق: $x - 5 \neq 0$

$\Downarrow$

مجال تعريف $f(x)$: $x \neq 5$

(2) بالنسبة لقيَم x البعيدة جدًّا عن نقطة رأس المحاور (سالبة أو موجبة)،

قيمة $f(x)$ تقترب من 1،

لذلك خطّ تقارب $f(x)$ الموازي للمحور x هو: $y = 1$

بالنسبة لقيَم x التي تقترب من 5 ،

$f(x)$ تحصل على قيَم سالبة جدًّا

(كبيرة جدًّا في قِيَمها المطلقة)

لذلك خطّ تقارب $f(x)$ الموازي للمحور y هو: $x = 5$

(3)

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 = \frac{1}{(x-5)^2} \;\Rightarrow\; x - 5 = \pm 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 6 \quad , \quad x = 4$$

نقطتا تقاطُع $f(x)$ مع المحور x هما: $(6, 0) \; , \; (4, 0)$

$$x = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

نقطة تقاطُع $f(x)$ مع المحور y هي: $\left(0, \frac{24}{25}\right)$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 6.

أ. (4)

$$f(x) = 1 - (x-5)^{-2}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = -(-2)\cdot(x-5)^{-3} = \frac{2}{(x-5)^3}$$
$$\Downarrow$$

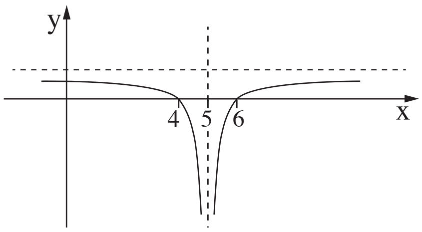
بالنسبةِ لـ $x < 5$ ينتج أنّ $(x-5) < 0$ ، لذلك : $f'(x) < 0$ بالنسبةِ لـ $x < 5$

بالنسبةِ لـ $x > 5$ ينتج أنّ $(x-5) > 0$ ، لذلك : $f'(x) > 0$ بالنسبةِ لـ $x > 5$

ب. حسب البند الفرعيّ "أ(4)" ينتج :

x	$x < 5$	5	$x > 5$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

حسب نقطتَي تقاطُع $f(x)$ مع المحورين ،
وحسب خطّي التقارب وحسب مجالات تصاعد وتنازل
الدالّة $f(x)$ الرسم البيانيّ هو :



جـ. إحداثيّات نقطة التماسّ : $(4, 0)$

ميل المماسّ : $f'(4) = \frac{2}{(4-5)^3} = -2$

معادلة المماسّ : $y - 0 = -2(x-4)$
$$\Downarrow$$
$$y = -2x + 8$$

نعوّض $x = 5$ في معادلة المماسّ وينتج : $y = -2\cdot 5 + 8 = -2$

لذلك نقطة التقاطع مع خطّ التقارب $x = 5$ هي : $(5, -2)$

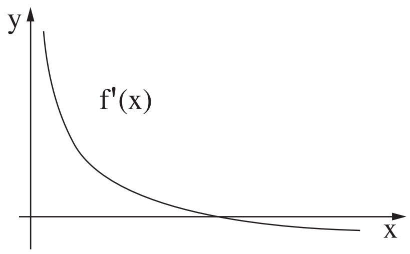
نعوّض $y = 1$ في معادلة المماسّ وينتج : $1 = -2x + 8$
$$\Downarrow$$
$$x = 3.5$$

لذلك نقطة التقاطع مع خطّ التقارب $y = 1$ هي : $(3.5, 1)$

/يتبع في صفحة 13/

السؤال 7

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة: $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 1$ ، $x > 0$.



أ. جد الإحداثيّ x لنقطة تقاطُع $f'(x)$ مع المحور x .

ب. جد الإحداثيّ x للنقطة القصوى الداخليّة للدالّة $f(x)$ ، وحدِّد نوع هذه النقطة القصوى. علّل.

جـ. معلوم أنّ الإحداثيّ y للنقطة القصوى الداخليّة لِـ $f(x)$ هو 0 . جد $f(x)$.

د. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ، والمستقيم $x = 4$ والمستقيم $x = 25$ والمحور x .

إجابة السؤال 7

أ. $$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4}{\sqrt{x}} = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = 4$$
$$\Downarrow$$
$$x = 16$$

ب. وجدنا أنّ $f'(16) = 0$ وحسب الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ ينتج:

x	$0 < x < 16$	16	$x > 16$
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

$$\Downarrow$$

لِـ $f(x)$ نهاية عظمى في $x = 16$

/ يتبع في صفحة 14 /

تكملة إجابة السؤال 7.

جـ. $f(x)$ هي دالّة أصليّة لِـ $f'(x)$ ، لذلك: $f(x)=\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)dx=2\cdot4\sqrt{x}-x+C$

إحداثيّات النقطة القصوى لِـ $f(x)$ هي: $(16\,,0)$

نعوّض النقطة $(16\,,0)$ في معادلة $f(x)$ ، وينتج:

$$2\cdot4\sqrt{16}-16+C=0$$
$$\Downarrow$$
$$C=-16$$

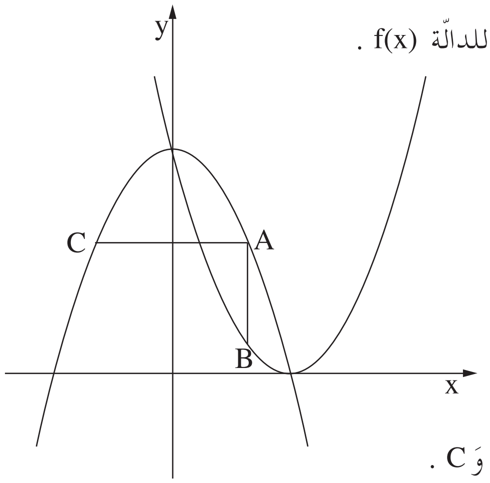
من هنا الدالّة $f(x)$ هي: $f(x)=8\sqrt{x}-x-16$

د. المساحة المطلوبة مكوَّنة من مساحتين:
إحداهما فوق المحور x والأخرى تحت المحور x ،
لذلك المساحة المطلوبة هي:

$$S=\int_4^{16}f'(x)\,dx-\int_{16}^{25}f'(x)\,dx=\left[f(16)-f(4)\right]-\left[f(25)-f(16)\right]$$
$$\Downarrow$$
$$S=(0+4)-(-1-0)=5$$

/ يتبع في صفحة 15 /

السؤال 8



يعرض الرسم الذي أمامك الرسمين البيانيّين للدالّتين
$f(x) = -x^2+9$ وَ $g(x) = (x-3)^2$.
النقطة A تقع في الربع الأوّل على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.
مرّروا من النقطة A مستقيمين:
أحد المستقيمين يوازي المحور y
ويقطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ في النقطة B ،
والمستقيم الآخر يوازي المحور x
ويقطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة C
(انظر الرسم).
نرمز بِـ t إلى الإحداثيّ x للنقطة A.

أ. عبِّر بدلالة t عن إحداثيّات النقاط A وَ B وَ C .

ب. جد قيمة t التي بالنسبة لها مساحة المثلّث ABC هي أكبر ما يمكن.

إجابة السؤال 8

أ. A على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في الربع الأوّل،
لذلك إحداثيّات A هي: $A(t, -t^2+9)$

AC يوازي المحور x ، لذلك: $y_A = y_C$

والقطع المكافئ متماثل بالنسبة للمحور y ، لذلك: $x_A = -x_C$

من هنا إحداثيّات النقطة C هي: $C(-t, -t^2+9)$

B على الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ في الربع الأوّل
بحيث AB يوازي المحور x ، لذلك: $x_A = x_B = t$

نعوّض $x_B = t$ في الدالّة $g(x)$ وينتج: $y_B = (t-3)^2$

لذلك إحداثيّات النقطة B هي: $B(t, (t-3)^2)$

/يتبع في صفحة 16/

تكملة إجابة السؤال 8.

ب. مساحة المثلّث ABC الذي فيه $AB \perp AC$ هي:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(x_A - x_C) \cdot (y_A - y_B)$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(t - (-t)) \cdot (-t^2 + 9 - (t-3)^2)$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle ABC} = -2t^3 + 6t^2 = S(t)$$

$$\Downarrow$$

$$S'(t) = -6t^2 + 12t$$

$$S'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6t(2-t) = 0$$

$$\Downarrow$$

A في الربع الأوّل، لذلك $t \neq 0$ ، ولذلك: $t = 2$

فحص نهاية عظمى: $S''(t) = -12t + 12$

$$\Downarrow$$

$$S''(2) = -12 \cdot 2 + 12 < 0$$

$$\Downarrow$$

نهاية عظمى في $t = 2$